

Funzioni omogenee: teorema di Eulero

(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Senza perdita di generalità riferiamoci ad una funzione di due variabili $f(x, y)$ definita nel campo A di \mathbb{R}^2 . Sia $P_0(x_0, y_0) \in A$ con $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$; l'equazione della retta r passante per l'origine delle coordinate e per il punto P_0 è:

$$y = \frac{y_0}{x_0}x, \quad (1)$$

che può essere messa in forma parametrica:

$$r) \quad \{x(\lambda) = x_0\lambda, y(\lambda) = y_0\lambda\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Al valore del parametro $\lambda_0 = 1$ corrisponde il punto P_0 .

Per ipotesi, A è un campo, quindi:

$$\exists \delta > 0 \mid \forall \lambda \in I_\delta(\lambda_0) = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta), \quad (\lambda x_0, \lambda y_0) \in A$$

o, ciò che è lo stesso:

$$\{(\lambda x_0, \lambda y_0) \mid \lambda \in I_\delta(\lambda_0)\} \subset A$$

In altri termini, comunque prendiamo un punto $P_0 \in A$ distinto dall'origine, esiste un intorno di $\lambda_0 = 1$ tale che la funzione risulta definita per tutti i valori $(\lambda x_0, \lambda y_0)$ con λ nel suddetto intorno.

In virtù dell'arbitrarietà del punto P_0 , da qui in avanti ci riferiamo ad un punto $P(x, y) \in A$, con $(x, y) \neq (0, 0)$.

Definizione. f è omogenea di grado $\alpha \iff$

$$\iff (\forall P(x, y) \in A, \forall \lambda \in (0, +\infty), f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y))$$

Esempio 1.

$$f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{2x^3 + y^3}{3x^4 + 5y^4}}$$

Abbiamo:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{-1/3} f(x, y),$$

donde $f(x, y)$ è omogenea di grado $\alpha = -\frac{1}{3}$.

Esempio 2.

$$g(x, y) = \sinh\left(\frac{2y}{x}\right)$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} g(\lambda x, \lambda y) &= g(x, y) \\ &= \lambda^0 g(x, y), \end{aligned}$$

donde $g(x, y)$ è omogenea di grado $\alpha = 0$.

Teorema 3.

$f \in C^1(A)$ è omognea di grado $\alpha \implies (f_x, f_y)$ omogenee di grado $\alpha - 1$

Proof. Per ipotesi:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^\alpha f(x, y)$$

Derivando ambo i membri (servendosi della regola di derivazione delle funzioni composte):

$$f_x(\lambda x, \lambda y) \lambda = \lambda^\alpha f_x(x, y),$$

donde l'asserto. □

Teorema 4.

$f \in C^1(A)$ è omognea di grado $\alpha \iff (\forall (x, y) \in A, \quad x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = \alpha f(x, y))$

Proof. Omessa. □