

Esercizio 1

Determinare l'intervallo di monotonia (crescenza/decrecenza) della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{x-2} \quad (1)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$. La derivata è:

$$f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^2}$$

Risulta:

$$\forall x \in X, f'(x) < 0 \implies (f(x) \text{ è strettamente crescente in } X)$$

Esercizio 2

Determinare l'intervallo di monotonia (crescenza/decrecenza) della funzione:

$$f(x) = (x-3)\sqrt{x} \quad (2)$$

Soluzione

La funzione è definita in

$$X = [0, +\infty)$$

La derivata è:

$$f'(x) = \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff \frac{x-1}{\sqrt{x}} > 0 \iff x \in (1, +\infty)$$

Si conclude che f è strettamente crescente in $(1, +\infty)$, ed è strettamente decrescente in $(0, 1)$.

Esercizio 3

Determinare l'intervallo di monotonia (crescenza/decrecenza) della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x} \quad (3)$$

Soluzione

La funzione è definita in

$$X = \mathbb{R}$$

La derivata è:

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{3}$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff \sqrt[3]{x^2} - 1 > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

Si conclude che f è strettamente crescente in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, ed è strettamente decrescente in $(-1, 1)$.

Esercizio 4

Determinare gli intervalli di monotonia (crescenza/decrecenza) della funzione:

$$f(x) = x + \sin x \quad (4)$$

Soluzione

La funzione è definita in

$$X = \mathbb{R}$$

Si osservi che tale funzione non è periodica:

$$\nexists T > 0 \mid f(x + kT) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

La derivata è:

$$f'(x) = 1 - \cos x,$$

e a differenza di $f(x)$, la $f'(x)$ è una funzione periodica di periodo $T' = 2\pi$.

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) \geq 0 \iff \cos x \leq 1 \iff x \in \mathbb{R}$$

Si conclude che f è crescente in X .

Determinare gli intervalli di monotonia (crescenza/decrecenza) della funzione:

$$f(x) = x \ln x \quad (5)$$

Soluzione

La funzione è definita in

$$X = (0, +\infty)$$

La derivata è:

$$f'(x) = \ln x + 1$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff \ln x \geq -1 \iff x > \frac{1}{e}$$

Si conclude che f è strettamente crescente in $(\frac{1}{e}, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(0, \frac{1}{e})$.

Esercizio 5

Determinare gli intervalli di monotonia (crescenza/decrecenza) della funzione:

$$f(x) = \arcsin(1+x) \quad (6)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X \mid -1 \leq 1+x \leq 1 \iff -2 \leq x \leq 1$, quindi:

$$X = [-2, 1]$$

La derivata è:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-(2x+x^2)}}$$

Tale funzione è definita in $X' = (-2, 1)$, per cui l'insieme di derivabilità di f è il suo intervallo di definizione privato degli estremi.

Evidentemente

$$\forall x \in X', \quad f'(x) > 0,$$

donde la funzione assegnata è strettamente crescente in X .

Esercizio 6

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \quad (7)$$

Soluzione

La derivata prima è:

$$f'(x) = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$$

Determiniamo i punti estremali¹:

$$f'(x) = 0 \iff x = 1$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \neq 1$$

Cioè f è strettamente crescente in $x_0 = 1$, per cui tale punto non è di estremo relativo. Si conclude che la funzione assegnata è priva di estremi relativi.

Esercizio 7

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5 \quad (8)$$

Soluzione

La derivata prima è:

$$f'(x) = 6(x^2 + x - 2)$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x^2 + x - 2 = 0 \iff x = -2, 1$$

Quindi abbiamo i punti estremali:

$$x_0 = -2, x'_0 = 1$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è preferibile studiare il segno di $f'(x)$:

¹I *punti estremali* sono gli zeri della derivata prima. Non è detto però che siano punti estremanti (cioè punti di estremo relativo). In altri termini:

$$f'(x_0) = 0 \not\iff (x_0 \text{ è punto di estremo relativo})$$

$$f'(x) > 0 \iff x^2 + x - 2 > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-2, 1)$. Da ciò segue che:

$$\begin{aligned}x_0 = -2 &\text{ è punto di massimo relativo, e } f(x_0) = 25 \\x'_0 = 1 &\text{ è punto di minimo relativo, e } f(x'_0) = -2\end{aligned}$$

Esercizio 8

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x^2(x - 12)^2 \tag{9}$$

Soluzione

La derivata prima è:

$$f'(x) = 4x(x - 12)(x - 6)$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0, 6, 12$$

Quindi abbiamo i punti estremali:

$$x_0 = 0, x'_0 = 6, x''_0 = 12$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x^2 + x - 2 > 0 \iff x \in (0, 6) \cup (12, +\infty)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(0, 6) \cup (12, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, 0) \cup (6, 12)$. Da ciò segue che:

$$\begin{aligned}x_0 = 0 &\text{ è punto di minimo relativo, e } f(0) = 0 \\x'_0 = 6 &\text{ è punto di massimo relativo, e } f(6) = 1296 \\x''_0 = 12 &\text{ è punto di minimo relativo, e } f(12) = 0\end{aligned}$$

Esercizio 9

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3 \quad (10)$$

Soluzione

La derivata prima è:

$$f'(x) = 2(x-1)(x-2)^2(3x^2 - 5x + 1)$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 1, x = 2, 3x^2 - 5x + 1 = 0$$

Quindi abbiamo i punti estremali:

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}, x_2 = 1, x_3 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}, x_4 = 2$$

Anzichè calcolare la derivata terza, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff (x-1)(x-2)^2(3x^2 - 5x + 1) > 0 \iff \\ &\iff x \in \left(\frac{5 - \sqrt{13}}{6}, 1\right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{6}, +\infty\right) \end{aligned}$$

Cioè f è strettamente crescente in $\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{6}, 1\right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{6}, +\infty\right)$ ed è strettamente decrescente in $\left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{13}}{6}\right) \cup \left(1, \frac{5 + \sqrt{13}}{6}\right)$. Da ciò segue che:

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6} &\text{ è punto di minimo relativo, e } f(x_1) = \frac{-587 - 143\sqrt{13}}{1458} \\ x_2 = 1 &\text{ è punto di massimo relativo, e } f(x_2) = 0 \\ x_3 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6} &\text{ è punto di minimo relativo, e } f(x_3) = \frac{-587 + 143\sqrt{13}}{1458} \end{aligned}$$

Esercizio 10

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 8}} \quad (11)$$

Soluzione

La funzione è definita in \mathbb{R} . La derivata prima è:

$$f'(x) = -\frac{4x}{\sqrt{(x^2 + 8)^3}}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0$$

Quindi abbiamo il punto estremo:

$$x_0 = 0$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 0)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ ed è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$. Da ciò segue che:

$$x_0 = 0 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(0) = \sqrt{2}$$

Esercizio 11

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}} \tag{12}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$. La derivata prima è:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{x}{(x^2 - 4)^{1/3}} \\ &= \frac{x^2 - 12}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^4}} \end{aligned}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm 2\sqrt{3}$$

Quindi abbiamo il punto estremo:

$$x_1 = -2\sqrt{3}, \quad x_2 = 2\sqrt{3}$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$. Da ciò segue che:

$$x_1 = -2\sqrt{3} \text{ è punto di massimo relativo, e } f(x_1) = -\sqrt{3}$$

$$x_2 = 2\sqrt{3} \text{ è punto di minimo relativo, e } f(x_2) = \sqrt{3}$$

Esercizio 12

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x - \ln(1+x) \tag{13}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-1, +\infty)$. La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{x}{1+x}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0$$

Quindi abbiamo il punto estremo:

$$x_0 = 0$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (0, +\infty)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-1, 0)$. Da ciò segue che:

$$x_0 = 0 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(0) = 0$$

Esercizio 13

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x \ln x \tag{14}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$. La derivata prima è:

$$f'(x) = \ln x + 1$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{e}$$

Quindi abbiamo il punto estremo:

$$x_0 = \frac{1}{e}$$

Anziché calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(\frac{1}{e}, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(0, \frac{1}{e})$. Da ciò segue che:

$$x_0 = \frac{1}{e} \text{ è punto di minimo relativo, e } f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$

Esercizio 14

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x \ln^2 x \tag{15}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$. La derivata prima è:

$$f'(x) = \ln^2 x + \ln x$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff \ln^2 x + \ln x = 0$$

Basta porre $t = \ln x$ e risolvere l'equazione di secondo grado: $t(t+2) = 0$, che dà: $t = 0, t = -2$, cioè: $x = 1, x = e^{-2}$.

Quindi abbiamo i punti estremali:

$$x_1 = \frac{1}{e^2}, x_2 = 1$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \underset{t=\ln x}{\iff} t(t+2) > 0 \iff t < -2, t > 0 \iff x \in \left(0, \frac{1}{e^2}\right) \cup (1, +\infty)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(0, \frac{1}{e^2}) \cup (1, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(\frac{1}{e^2}, 1)$.
Da ciò segue che:

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{1}{e^2} & \text{ è punto di massimo relativo, e } f(x_1) = \frac{4}{e^2} \\ x_2 = 1 & \text{ è punto di minimo relativo, e } f(x_2) = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 15

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = xe^x \tag{16}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$. La derivata prima è:

$$f'(x) = e^x(1+x)$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = -1$$

Quindi abbiamo il punto estremo:

$$x_0 = -1$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-1, +\infty)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(-1, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$. Da ciò segue che:

$$x_0 = -1 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(x_0) = -\frac{1}{e}$$

Esercizio 16

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad (17)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$. La derivata prima è:

$$f'(x) = x e^{-x} (2 - x)$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0, x = 2$$

Quindi abbiamo i punti estremali:

$$x_1 = 0, x_2 = 2$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (0, 2)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(0, 2)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

Da ciò segue che:

$$x_1 = 0 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(x_1) = 0$$

$$x_2 = 2 \text{ è punto di massimo relativo, e } f(x_2) = \frac{4}{e^2}$$

Esercizio 17

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = 2 \sin 2x + \sin 4x \quad (18)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$. Trattandosi di una funzione periodica, conviene riferirsi al suo intervallo di periodicità. A tale scopo determiniamo il periodo fondamentale di (18). Scriviamo:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

essendo:

$$f_1(x) = 2 \sin 2x, \quad f_2(x) = \sin 4x$$

Le funzioni f_1 e f_2 sono periodiche di periodo:

$$T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi, \quad T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (19)$$

Ora, per definizione di funzione periodica, deve essere:

$$f(x + kT) = f(x) \iff f_1(x + kT) + f_2(x + kT) = f_1(x) + f_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (20)$$

La (20) è verificata se e solo se i periodi T, T_1, T_2 sono legati da una relazione del tipo:

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2, \quad \text{con } n_1, n_2 \in \mathbb{N} - \{0\} \quad (21)$$

Infatti:

$$f_1(x + k' T_1) + f_2(x + k'' T_2) = f_1(x) + f_2(x),$$

essendo $k' = k n_1, k'' = k n_2, \forall k \in \mathbb{Z}$. La (21) implica $n_2 = 2 n_1$, donde:

$$T = n_1 T_1 = 2 n_1 T_2$$

Il periodo fondamentale si ottiene per $n_1 = 1$:

$$T = T_1 = 2 T_2 = \pi$$

Si conclude che la funzione assegnata è periodica di periodo π . Perciò l'intervallo di periodicità è $X_0 = [0, \pi]$.

La derivata prima è:

$$f'(x) = 4 \cos 2x + 4 \cos 4x$$

Determiniamo i punti estremali. A tale scopo eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = 2x,$$

ottenendo:

$$f'(t) = 4 \cos t + 4 \cos 2t$$

Ma $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$, donde:

$$f'(t) = 4 (2 \cos^2 t + \cos t - 1) \quad (22)$$

Da ciò segue che gli zeri della $f'(t)$ sono le radici dell'equazione trigonometrica:

$$2 \cos^2 t + \cos t - 1 = 0 \quad (23)$$

La (23) è riducibile ad un'equazione algebrica attraverso l'ulteriore cambio di variabile:

$$\eta = \cos t,$$

da cui:

$$2\eta^2 + \eta - 1 = 0 \iff \eta = -1, \frac{1}{2}$$

Ripristiniamo la variabile x : $\cos t = \frac{1}{2} \implies t = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$, poichè ci riferiamo all'intervallo $[0, 2\pi]$ per ciò che riguarda la variabile t , e tale intervallo corrisponde a $x \in [0, \pi]$, poichè $x = \frac{t}{2}$.
Quindi:

$$\eta = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

L'altra radice: $\eta = -1 \implies t = \pi \implies x = \frac{\pi}{2}$.

Quindi abbiamo i punto estremali:

$$x = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{5}{6}\pi$$

Studiamo il segno di $f'(x)$ attraverso la (22):

$$f'(t) > 0 \iff 2\cos^2 t + \cos t - 1 > 0 \iff \eta < -1, \eta > \frac{1}{2}$$

Osserviamo che $\eta < -1 \iff \cos t < -1$, che è priva di soluzioni, per cui resta la seconda:

$$\cos t > \frac{1}{2} \implies 0 \leq t < \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi < t \leq 2\pi \iff 0 \leq x < \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi < x \leq \pi$$

Cioè f è strettamente crescente in $[0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5}{6}\pi, \pi]$ ed è strettamente decrescente in $[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$.
Da ciò segue che gli estremi relativi in $[0, \pi]$ sono:

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ è punto di massimo relativo, e } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \frac{5}{6}\pi \text{ è punto di minimo relativo, e } f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Inoltre $x = \frac{\pi}{2}$ non è punto estremante poichè la funzione è ivi decrescente.
In $(-\infty, +\infty)$ gli estremi relativi sono:

$$M_k \left(\pi \left(k + \frac{1}{6} \right), \frac{3\sqrt{3}}{2} \right), \quad m_k \left(\pi \left(k + \frac{5}{6} \right), -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 18

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \tag{24}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 1$$

Quindi abbiamo il punto estremo:

$$x_0 = 1$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (1, +\infty)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(1, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, 1)$. Da ciò segue che:

$$x_0 = 1 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(1) = e$$

Quindi il minimo relativo è $m(1, e)$.

Esercizio 19

Determinare gli estremi assoluti della funzione:

$$f(x) = x^3 \tag{25}$$

nell'intervallo $A = [-1, 3]$

Soluzione

Per il teorema di Weierstrass:

$$f \in C^0([-1, 3]) \implies \exists \min_A f, \max_A f \tag{26}$$

Iniziamo a determinare gli eventuali estremi relativi, ricercando poi gli estremi assoluti tra questi. La derivata prima è

$$f'(x) = 3x^2,$$

per cui l'unico punto estremo è:

$$x_0 = 0$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \neq 0$$

Cioè f è crescente in $x_0 = 0$. Da ciò segue che x_0 non è punto di estremo relativo. Quindi gli estremi assoluti vanno ricercati tra i valori assunti agli estremi dell'intervallo A . Precisamente, in forza della crescita di f , si ha:

$$x_1 = -1 \text{ è punto di minimo assoluto, e } f(-1) = -1$$

$$x_2 = 3 \text{ è punto di massimo assoluto, e } f(3) = 27$$

Con ovvio significato dei simboli:

$$m(-1, -1), M(3, 27)$$

Esercizio 20

Determinare gli estremi assoluti della funzione:

$$f(x) = \arccos x \tag{27}$$

nel proprio insieme di esistenza.

Soluzione

La funzione è definita in $X = [-1, 1]$.

Per il teorema di Weierstrass:

$$f \in C^0([-1, 1]) \implies \exists \min_X f, \max_X f \tag{28}$$

Iniziamo a determinare gli eventuali estremi relativi, ricercando poi gli estremi assoluti tra questi. La derivata prima è

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Risulta:

$$\forall x \in (-1, 1), f'(x) < 0$$

donde f è priva di estremi relativi, ed è strettamente decrescente in X . Gli estremi assoluti vanno perciò ricercati tra gli estremi di X .

Precisamente, in forza della decrescenza di f , si ha:

$$x_1 = -1 \text{ è punto di massimo assoluto, e } f(-1) = \pi$$

$$x_2 = 1 \text{ è punto di minimo assoluto, e } f(1) = 0$$

Con ovvio significato dei simboli:

$$m(0, 1), M(-1, \pi)$$