

**Variabile Complessa A.A. 2008-2009**  
**Soluzioni del Foglio 2**

### 2.1 Esercizio

Dimostrare che

$$\frac{1}{2}|e^y - e^{-y}| \leq |\sin z| \leq \frac{1}{2}|e^y + e^{-y}|$$

**Soluzione.** Combinando la definizione

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

e la disuguaglianza triangolare

$$||w| - |\zeta|| \leq |w - \zeta| \leq |w| + |\zeta| \quad \forall w, \zeta \in \mathbb{C}$$

si trova

$$\frac{1}{2} ||e^{iz}| - |e^{-iz}|| \leq |\sin z| \leq \frac{1}{2} (|e^{iz}| + |e^{-iz}|).$$

Dato che  $|e^{iz}| = e^{-y}$  e  $|e^{-iz}| = e^y$  si ha la disuguaglianza cercata.

Quindi

$$|\sin z| \sim \frac{e^{|y|}}{2} \quad \text{per } y \rightarrow \pm\infty$$

cioè  $\sin z$  è illimitato in  $\mathbb{C}$ .

### 2.2 Esercizio

Determinare  $|\sin z|^2$ .

**Soluzione.** Dalla definizione

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

e da

$$e^{iz} = e^{ix} e^{-y} = e^{-y}(\cos x + i \sin x); \quad e^{-iz} = e^{-ix} e^y = e^y(\cos x - i \sin x)$$

si trova

$$\sin z = \cos x \frac{e^{-y} - e^y}{2i} + i \sin x \frac{e^{-y} + e^y}{2i} = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

Quindi

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y = \sin^2 x + \sinh^2 y.$$

Questa formula implica che

$$\sin z = 0 \iff \sin x = 0; \sinh y = 0 \iff y = 0; x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \iff z = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

### 2.3 Esercizio

Determinare insieme di definizione, insieme di continuità e campo di olomorfia delle seguenti funzioni:

$$\frac{\sin z + 1}{i + 3z}; \quad \frac{1}{\cosh z + e^z}; \quad \frac{1}{1 + e^z}; \quad \frac{1}{e^{iz} + \cos z}; \quad \frac{1}{e^z - e}.$$

**Soluzione.** Detti  $I_{def}$  l'insieme di definizione,  $I_{cont}$  l'insieme di continuità e  $O$  il campo di olomorfia di  $f$ , risulta:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{\sin z + 1}{i + 3z} : \quad & I_{def} = I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z = -i/3\} \\ f(z) = \frac{1}{\cosh z + e^z} : \quad & I_{def} = I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z : z = -\log(\sqrt{3}) + i(\frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}\} \\ f(z) = \frac{1}{1 + e^z} : \quad & I_{def} = I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z : z = i(2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}\} \\ f(z) = \frac{1}{e^{iz} + \cos z} : \quad & I_{def} = I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z : z = (\frac{\pi}{2} + k\pi) + i \log \sqrt{3}, k \in \mathbb{Z}\} \\ f(z) = \frac{1}{e^z - e} : \quad & I_{def} = I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z : z = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

### 2.4 Esercizio

Determinare tutti i valori di

$$2 \operatorname{Log}(1 - i); \operatorname{Log}(\sqrt{3} + i); \operatorname{Log}(4i); \operatorname{Log}(4 - 4i); \operatorname{Log} 5.$$

**Soluzione.**

$$\bullet z = 1 - i \Rightarrow |z| = \sqrt{2}; \quad \operatorname{Arg} z = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \arg z = -\frac{\pi}{4}.$$

Quindi

$$2 \operatorname{Log}(1 - i) = 2(\log \sqrt{2} + i(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi)) = \log 2 + i(-\frac{\pi}{2} + 4k\pi) \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2 \log(1 - i) = \log 2 - i\frac{\pi}{2} \text{ determinazione principale.}$$

Calcolando, invece

$$z^2 = (1 - i)^2 = -2i \Rightarrow |z| = 2; \quad \operatorname{Arg} z^2 = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \arg z = -\frac{\pi}{2}$$

si trova

$$\operatorname{Log}(1 - i)^2 = \log 2 + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\log(1 - i)^2 = \log 2 - i\frac{\pi}{2} \text{ determinazione principale.}$$

- $z = \sqrt{3} + i \Rightarrow |z| = 2; \quad \text{Arg } z = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \arg z = \frac{\pi}{6}.$

Quindi

$$\text{Log}(\sqrt{3} + i) = \text{Log } z = \log |z| + i\text{Arg } z = \log 2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\log(\sqrt{3} + i) = \log z = \log 2 + i\frac{\pi}{6} \text{ determinazione principale.}$$

- $z = 4i \Rightarrow |z| = 4; \quad \text{Arg } z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \arg z = \frac{\pi}{2}.$

Quindi

$$\text{Log}(4i) = \log 4 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\log(4i) = \log 4 + i\frac{\pi}{2} \text{ determinazione principale.}$$

- $z = 4 - 4i \Rightarrow |z| = 4\sqrt{2}; \quad \text{Arg } z = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \arg z = -\frac{\pi}{4}.$

Quindi

$$\text{Log}(4 - 4i) = \log(4\sqrt{2}) + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\log(4 - 4i) = \log(4\sqrt{2}) - i\frac{\pi}{4} \text{ determinazione principale.}$$

- $z = 5 \Rightarrow |z| = 5; \quad \text{Arg } z = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad \arg z = 0.$

Quindi

$$\text{Log } 5 = \log 5 + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\log 5 = \log 5 \text{ determinazione principale.}$$

## 2.5 Esercizio

Determinare tutti i possibili valori che la potenza  $(-1)^{-i}$  può assumere al variare della determinazione dell'argomento.

**Soluzione.** Per definizione si ha

$$(-1)^{-i} = e^{-i\text{Log}(-1)}.$$

Dato che

$$\text{Log}(-1) = \log 1 + i\text{Arg}(-1) = i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}$$

si ottiene

$$(-1)^{-i} = e^{(\pi+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

La determinazione principale della potenza si ottiene scegliendo la determinazione principale del logaritmo. Quindi

$$\log(-1) = i \arg(-1) = i\pi \Rightarrow (-1)^{-i} = e^\pi \quad \text{determinazione principale.}$$

## 2.6 Esercizio

Determinare il valore di  $\arctan(2 - i)$ .

**Soluzione.** Le funzioni inverse della funzione  $\tan z$  sono le seguenti:

$$\operatorname{Arctan} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Log} \frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad z \neq \pm i.$$

Si assume come principale, e si indica con  $\arctan z$ , quella che corrisponde alla determinazione principale del logaritmo cioè

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz}, \quad z \neq \pm i.$$

Quindi

$$\arctan(2 - i) = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + i(2 - i)}{1 - i(2 - i)} = \frac{1}{2i} \log(-1 + i).$$

Dato che  $\log(-1 + i) = \log \sqrt{2} + i \frac{3}{4} \pi$  si trova

$$\arctan(2 - i) = \frac{1}{2i} (\log \sqrt{2} + i \frac{3}{4} \pi) = \frac{3\pi}{8} - i \log \sqrt[4]{2}.$$

## 2.7 Esercizio

Determinare il campo di olomorfia delle seguenti funzioni:

$$\log z^4; \quad \sqrt{z^2 - 4}; \quad i \sqrt{4 - z^2}; \quad \log \left( \frac{1 + 2iz}{1 - 2iz} \right);$$

$$\log \left( \frac{2 - z}{2 + z} \right); \quad \sqrt{1 + 2z^2}; \quad \sqrt[3]{1 + \frac{z - i}{z + i}}; \quad \log(-1 + \sqrt{1 + z^3})$$

dove si è scelta la determinazione principale del logaritmo e della radice.

**Soluzione.** Detti  $I_{def}$  l'insieme di definizione,  $I_{cont}$  l'insieme di continuità e  $O$  il campo di olomorfia di  $f$ , risulta:

- $f(z) = \log z^4$  :

$$I_{def} = \mathbb{C} - \{z = 0\}; \quad I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z : |\operatorname{Re}(z)| = |\operatorname{Im}(z)|\}$$

- $f(z) = \sqrt{z^2 - 4}$  :

$$I_{def} = \mathbb{C}; \quad I_{cont} = \mathbb{C} - \{\{z : \operatorname{Re}(z) = 0\} \cup \{z : \operatorname{Im}(z) = 0, |\operatorname{Re}(z)| < 2\}\};$$

$$O = \mathbb{C} - \{\{z : \operatorname{Re}(z) = 0\} \cup \{z : \operatorname{Im}(z) = 0, |\operatorname{Re}(z)| \leq 2\}\};$$

- $f(z) = i\sqrt{4-z^2}$  :

$$I_{def} = \mathbb{C}; \quad I_{cont} = \mathbb{C} - \{z : \text{Im}(z) = 0, |\text{Re}(z)| > 2\};$$

$$O = \mathbb{C} - \{z : \text{Im}(z) = 0; |\text{Re}(z)| \geq 2\}.$$

- $f(z) = \log\left(\frac{1+2iz}{1-2iz}\right)$  :

$$I_{def} = \mathbb{C} - \{z = \pm \frac{i}{2}\}; \quad I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z : \text{Re}(z) = 0, |\text{Im}(z)| \geq \frac{1}{2}\}$$

- $f(z) = \log\left(\frac{2-z}{2+z}\right)$  :

$$I_{def} = \mathbb{C} - \{z = \pm 2\}; \quad I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z : \text{Im}(z) = 0, |\text{Re}(z)| \geq 2\}$$

- $f(z) = \sqrt{1+2z^2}$  :

$$I_{def} = \mathbb{C}; \quad I_{cont} = \mathbb{C} - \{z : \text{Re}(z) = 0, |\text{Im}(z)| > \frac{1}{\sqrt{2}}\};$$

$$O = \mathbb{C} - \{z : \text{Re}(z) = 0, |\text{Im}(z)| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

- $f(z) = \sqrt[3]{1 + \frac{z-i}{z+i}}$  :

$$I_{def} = \mathbb{C} - \{z = -i\}; \quad I_{cont} = \mathbb{C} - \{z : \text{Re}(z) = 0, -1 \leq \text{Im}(z) < 0\};$$

$$O = \mathbb{C} - \{z : \text{Re}(z) = 0, -1 \leq \text{Im}(z) \leq 0\}$$

- $f(z) = \log(-1 + \sqrt{1+z^3})$  :

Studiamo inizialmente la funzione  $g(w) = \log(-1 + \sqrt{w})$ . Si ha per la  $g(w)$ :

$$I_{def} = \mathbb{C} - \{w = 1\}; \quad I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{w : \text{Im}(w) = 0, \text{Re}(w) \leq 0\}.$$

Quindi per la funzione  $\log(-1 + \sqrt{1+z^3})$  si ottiene:

$$\begin{aligned} I_{def} &= \mathbb{C} - \{z = 0\}; \quad I_{cont} = O = \mathbb{C} - \{z : \text{Im}(1+z^3) = 0, \text{Re}(1+z^3) \leq 0\} = \\ &= \mathbb{C} - \{\{z : \text{Re}(z) \leq 0, \text{Im}(z) = 0\} \cup \{z : \text{Re}(z) \geq 0, \sqrt{3}\text{Re}(z) = |\text{Im}(z)|\}\} \end{aligned}$$

## 2.8 Esercizio

Calcolare, applicando la definizione,

$$\int_{+\gamma} \bar{z} dz$$

dove  $\gamma$  è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2, percorsa nel verso antiorario.

**Soluzione.** Usando la definizione di integrale curvilineo complesso si ha

$$\int_{+\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt, \quad +\gamma = \{z = z(t), a \leq t \leq b\}.$$

In questo caso  $f(z) = \bar{z}$  e  $+\gamma = \{z = 2e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi\}$ . Applicando la definizione si ottiene  $8\pi i$ .

## 2.9 Esercizio

Calcolare

$$\int_{+\gamma} \frac{z}{\bar{z}} dz$$

dove  $+\gamma$  è costituita dalla semicirconferenza  $|z| = 1$  con  $\text{Im}z > 0$  e dal segmento dell'asse  $x$  compreso tra  $-1$  e  $1$ , percorsa in verso antiorario.

**Soluzione.** Sia  $+\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$  dove

$$\begin{array}{ll} \gamma_1 = \{z = e^{it}, 0 \leq t \leq \pi\} & \text{semicirconferenza} \\ \gamma_2 = \{z = t, -1 \leq t \leq 1\} & \text{segmento } (-1, 0) \rightarrow (1, 0). \end{array}$$

Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \frac{z}{\bar{z}} dz &= i \int_0^\pi e^{3it} dt = \frac{e^{3\pi i} - 1}{3} = -\frac{2}{3}; \\ \int_{\gamma_2} \frac{z}{\bar{z}} dz &= \int_{-1}^1 dt = 2. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{+\gamma} \frac{z}{\bar{z}} dz = \int_{\gamma_1} \frac{z}{\bar{z}} dz + \int_{\gamma_2} \frac{z}{\bar{z}} dz = \frac{4}{3}.$$

## 2.10 Esercizio

Calcolare

$$\int_{+\gamma} (z - \bar{z})^2 dz$$

dove  $\gamma$  è il triangolo di vertici  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$  percorso nel verso antiorario.

**Soluzione.** Sia  $+\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$  dove

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \{z = t, \quad 0 \leq t \leq 1\} && \text{segmento } (0, 0) \rightarrow (1, 0) \\ \gamma_2 &= \{z = (1-t) + it, \quad 0 \leq t \leq 1\} && \text{segmento } (1, 0) \rightarrow (0, 1) \\ \gamma_3 &= \{z = i(1-t), \quad 0 \leq t \leq 1\} && \text{segmento } (0, 1) \rightarrow (0, 0)\end{aligned}$$

Dato che  $(z - \bar{z})^2 = (2i \operatorname{Im} z)^2 = -4 \operatorname{Im}^2 z$  si ha

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} (z - \bar{z})^2 dz &= 0 \text{ dato che } z = \bar{z} \text{ su } \gamma_1; \\ \int_{\gamma_2} (z - \bar{z})^2 dz &= -4(-1+i) \int_0^1 t^2 dt = \frac{4}{3}(1-i); \\ \int_{\gamma_3} (z - \bar{z})^2 dz &= -4(-i) \int_0^1 (1-t)^2 dt = \frac{4}{3}i.\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_{+\gamma} (z - \bar{z})^2 dz = \int_{\gamma_1} (z - \bar{z})^2 dz + \int_{\gamma_2} (z - \bar{z})^2 dz + \int_{\gamma_3} (z - \bar{z})^2 dz = \frac{4}{3}.$$