Esercizio 1

Un disco circolare, orizzontale, di raggio $R = 20\,\mathrm{cm}$ ruota senza attrito attorno al suo asse con velocità angolare $\omega_0 = 5rad/\,\mathrm{s}$; in prossimità del bordo è scavata una vaschetta circolare di larghezza trascurabile rispetto ad R ed il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse di rotazione è $I_0 = 0.04\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$.
Ad un certo istante e per la durata di $\tau = 5\,\mathrm{s}$ cade sul disco un liquido con velocità costante, tale che la massa di liquido raccolta nella vaschetta per unità di tempo è $\mu = 10^2\,\mathrm{g}\,/\,\mathrm{s}$.

1. Determinare la velocità finale del disco.

Successivamente si porta a contatto del bordo del disco un blocchetto di gomma, fermo rispetto all'asse di rotazione, realizzando in questo modo un freno capace di esercitare una forza di attrito costante $|\mathbf{F}| = 0.1\,\mathrm{N}$.
Calcolare:

2. dopo quanto tempo si arresta il disco;
3. il numero di giri compiuti prima di fermarsi.

***

Soluzione

1. Per la conservazione del momento angolare si ha:

$$I_0\omega_0 = I_1\omega_1 \tag{1}$$

in cui il nuovo momento di inerzia è:

$$I_1 = I_0 + \rho R^2 r = 4\cdot 10^{-2} + 10^{-1}\cdot 4\cdot 10^{-2}\cdot 5 = 6\cdot 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Dalla (1):

$$\omega_1 = \frac{I_0\omega_0}{I_1} \simeq 3.33\mathrm{rad}/\,\mathrm{s}$$

2. Dalla II equazione cardinale:

$$M = \frac{d}{dt}(I_1\omega) = I_1\frac{d\omega}{dt}$$

La forza $\mathbf{F}$ è tangenziale al disco e quindi si ha $L = R\cdot|\mathbf{F}|$, ed inoltre: $-R\cdot|\mathbf{F}| = I_1\frac{d\omega}{dt}$ da cui integrando:

$$\omega(t) = \omega_1 - \frac{R|\mathbf{F}|}{I_1}t,$$

che si annulla per $t = t_*$ dato da:

$$t_* = \frac{I_1\omega_1}{R|\mathbf{F}|} = \frac{I_0\omega_0}{R|\mathbf{F}|} = \frac{4\cdot 10^{-2}\cdot 5}{2\cdot 10^{-1}\cdot 10^{-1}} = 10\,\mathrm{s}$$

3. Per il teorema delle forze vive si ha:

$$\frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = L_{attr} = |\mathbf{F}| \cdot s \Longrightarrow s = \frac{I_1\omega_1^2}{2\,|\mathbf{F}|}$$

Il numero di giri compiuti prima di fermarsi è:

$$n = \frac{s}{2\pi R} = \frac{I_1\omega_1^2}{4\pi R\,|\mathbf{F}|} = \frac{6\cdot 10^{-2}\cdot 3.33^2}{4\cdot\pi\cdot 2\cdot 10^{-2}\cdot 10h-1} \simeq 2.65 \text{ giri}$$

Esercizio 2

Un disco di massa m e raggio r poggia su di un piano, privo di attrito.
Sopra un diametro della base superiore sono poggiati, in posizioni simmetriche rispetto al centro, due passerotti ciascuno di massa m_1 e sono situati ognuno a distanza $\frac{r}{2}$ dal centro.
Ad un certo istante i passerotti prendono il volo contemporaneamente, con velocità di uguale modulo v.
Determinare quantitativamente il moto del disco nel caso in cui i due vettori velocità siano entrambi contenuti in piani ortogonali al diametro passante per le posizioni iniziali e formino un angolo di $+\alpha$ e di $-\alpha$ con la verticale.
Dati numerici:
$r = 10\,\mathrm{cm}$, $m = 50\,\mathrm{kg}$, $m_1 = 200\,\mathrm{g}$, $v = 5\,\mathrm{m/s}$, $\alpha = 30^\circ$.

***

Soluzione
Per la conservazione della componente della quantità di moto nel piano orizzontale (detta v_c la velocità del centro di massa), si ha:

$$m_1 v\cos\frac{\pi}{3} - m_1 v\cos\frac{\pi}{3} + m v_c = 0 \underset{m\neq 0}{\Longrightarrow} v_c = 0$$

Per la conservazione della componente verticale del momento della quantità di moto, si ha invece:

$$2m_1 v\cdot\frac{r}{2}\cos\frac{\pi}{3} = I\omega,$$

ma $I = \frac{1}{2}mr^2 = 2.5\cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\cdot m^2}$ e pertanto dall'equazione precedente si ottiene $\omega = 200 rad/\mathrm{s}$.
Quindi il disco ruota attorno al centro di massa (che resta fermo), con velocità angolare ω.

Esercizio 3

Un proiettile, non soggetto a forze, sta percorrendo una traiettoria diretta su un bersaglio, alla velocità v.
A 3 km dal proiettile esplode e si divide in due frammenti A e B di massa $m_A = 2m_B$.
Dopo l'esplosione il frammento A si ferma.
Si chiede perchè il frammento B arriverà sul bersaglio e il tempo impiegato ad arrivare al bersaglio dall'istante dell'espolosione. ($v = 10^3\,\mathrm{m/s}$).

***

Soluzione
Per la conservazione della quantità di moto, si ha:

$$(m_A + m_B)\,\mathbf{v} = m\mathbf{v}_A + m\mathbf{v}_B \tag{2}$$

Poichè $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$, $\mathbf{v}_B$ avrà la stessa direzione e verso di $\mathbf{v}$ e quindi B arriverà sul bersaglio.

$$|\mathbf{v}_B| = \frac{3m_B}{m_B}\,|\mathbf{v}| = 3 \cdot 10^3\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s} \tag{3}$$
$$t = \frac{|\mathbf{v}_B|}{d} = 1\,\mathrm{s}\,,$$

essendo $d = 3$ km.

Esercizio 4

Una mole di gas perfetto monoatomico inizialmente alla temperatura $T_1 = 300\,\mathrm{K}$ compie una trasformazione adiabatica reversibile che ne fa raddoppiare il volume. Si calcoli il lavoro ottenuto durante la trasformazione.

***

Soluzione
Per il 1° principio applicato ai gas perfetti si ha:

$$L = \Delta U = C_v\,(T_1 - T_2)$$

Per una trasformazione adiabatica reversibile deve essere:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$$

Quindi:

$$L = C_v T_1 \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$$

I dati sono: $V_2 = 2V_1$, $C_v = \frac{3}{2}R$ e $\gamma = \frac{5}{3}$, quindi:

$$L \simeq 1.381\,\mathrm{J}$$

Esercizio 5

Un proiettile di piombo di massa $m = 10\,\mathrm{g}$ è lanciato con velocità $\mathbf{v}$ formante un angolo di $45°$ con un piano sul quale è appoggiato un blocco di polistirolo espanso di massa 10 volte maggiore.
Il blocco è vincolato a rimanere aderente alla superficie del piano sulla quale può scorrere senza attrito.
Assumendo che inizialmente tutti i corpi si trovino a $T = 300\,\mathrm{K}$ e che tutta l'energia meccanica dissipata si trasformi in calore che viene totalmente assorbito dal proiettile, calcolare il valore della velocità iniziale che il proiettile deve possedere affinchè la sua temperatura aumenti di $50\,\mathrm{K}$ in conseguenza del frenamento.
Il calore specifico del piombo a volume costante è pari a $0.032\,\mathrm{cal}\,/\,\mathrm{g}$

***

Soluzione
Per la conservazione della quantità di moto:

$$m_{Pb} \cdot v \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 11 m_{Pb} v',$$

da cui:

$$v' = v\frac{\sqrt{2}}{22} = 0.064v$$

Per la conservazione dell'energia totale:

$$\frac{1}{2} m_{Pb} v^2 = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot m_{Pb} \left(0.064 + v\right)^2 + Q,$$

essendo:

$$Q = c_{v_{Pb}} \Delta T = 1.6\,\mathrm{cal} = 1.6 \cdot 4.18\,\mathrm{J} = 6.69\,\mathrm{J}$$

Quindi:

$$5 \cdot 10^{-3} v^2 = 5.5 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 4.1 \cdot 10^{-6} \cdot v^2 + Q$$

Risolvendo rispetto a v e scartando la soluzione < 0:

$$v \simeq 36.58\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$$

Esercizio 6

Calcolare la massa $M_\odot$ del sole conoscendo solo i seguenti dati: la costante di gravitazione universale, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$; il periodo di rivoluzione della terra intorno al sole, $T = 365$ giorni; il raggio dell'orbita di rivoluzione della terra intorno al sole, supposta circolare, $r = 1.488 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$.

***

Soluzione
Trascurando il raggio della terra rispetto a r, scriviamo:

$$\frac{GM_{\odot}M_T}{r^2} = M_T\omega^2 r$$

Ma $\omega = 2\pi/T$ e ricavando $M_{\odot}$:

$$M_{\odot} = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} \simeq 1.96 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$$

Esercizio 7

Un proiettile di massa $m = 100\,\mathrm{g}$ è sparato orizzontalmente in un blocco di legno di massa $M = 5\,\mathrm{kg}$, fermo su una superficie orizzontale scabra.
Il coefficiente di attrito fra blocco e superficie è $\mu = 0.35$.
Sapendo che il proiettile si arresta dentro il blocco e che il sistema striscia per un tratto $d = 3\,\mathrm{m}$ sulla superficie, determinare la velocità v del proiettile.

***

Soluzione
Poichè il proiettile si arresta nel blocco, l'urto è completamente anelastico, per cui varrà solo il principio di conservazione della quantità di moto:

$$mv = (m + M)\,v_1, \tag{4}$$

essendo $v_1$la velocità del sistema dopo l'urto.
dopo l'urto il sistema è sottoposto alle forze non conservati di attrito; il suo moto è uniformemente decelerato, con decelerazione costante a:

$$F_a = \mu\,(m + M)\,a, \tag{5}$$

dove $\mathbf{F}_a$ è la forza d'attrito.
Il sistema si ferma dopo aver percorso una distanza d tale che:

$$v_1^2 - 2ad = 0 \tag{6}$$

Qui a è la decelerazione:

$$a = \frac{F_a}{m + M} = \mu g$$

La (6) è verificata quando

$$v_1 = \sqrt{2\mu g d},$$

da cui:

$$v = \frac{m + M}{m} v_1 = \frac{m + M}{m}\sqrt{2\mu g d} \simeq 231.4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Esercizio 8

Un proiettile di massa $m = 4\,\mathrm{g}$ va ad urtare, con una velocità di $600\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$, contro un pendolo balistico di massa $M = 1\,\mathrm{kg}$ e di spessore $25\,\mathrm{cm}$ (inizialmente fermo).
Il proiettile passa attraverso il pendolo ed emerge con una velocità di $100\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$.
Calcolare la forza frenante (costante nel tempo) che agisce sul proiettile durante il passaggio attraverso il pendolo e determinare l'altezza alla quale il pendolo stesso, sale.
Soluzione
Per la conservazione della quantità di moto:

$$mV = mV_1 + MV_2 \Longrightarrow V_2 = \frac{m\,(V - V_1)}{M} = 2\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$$

L'energia acquistata dal pendolo è $\frac{1}{2}MV_2^2$ e quindi, per la conservazione dell'energia, si avrà:

$$\frac{1}{2}MV_2^2 = Mgh \Longrightarrow h = \frac{V_2^2}{2g} = 0.20\,\mathrm{cm}$$

La perdita di velocità subita dal plroiettile, è tale che:

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mV_1 - \frac{1}{2}mV_2^2 = 698\,\mathrm{J},$$

che è uguale al lavoro fatto dalla forza frenante f, ossia:

$$f \cdot s = 698\,\mathrm{J}$$

Ma $s = 25\,\mathrm{cm}$, per cui:

$$f = 2792\,\mathrm{N}$$

Esercizio 9

L'energia libera di un sistema è data, in funzione di temperatura e volume, dall'espressione:

$$A\,(T, V) = -RT\ln T^{3/2}V$$

Calcolare il calore specifico, a volume costante, del sistema.
Soluzione
Indicando con C_v il calore specifico, abbiamo:

$$C_v = R\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

Ma:

$$S = -\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_V$$

Quindi:

$$C_v = -T\left(\frac{\partial^2 S}{\partial T^2}\right)_V = \frac{3}{2}R$$

Esercizio 10

Un gas perfetto monoatomico è diviso inizialmente tra 2 contenitori A e B, rispettivamente di volume $V_A = 5\,\mathrm{l}$ e $V_B = 3\,\mathrm{l}$.
La temperatura del gas contenuto in A e $80\,°\mathrm{C}$ mentre per il gas in B è $30\,°\mathrm{C}$.
A pressione costante pari ad $1\,\mathrm{atm}$, i due recipienti vengono posti in comunicazione in modo da fare diffondere le 2 porzioni di gas fino a raggiungere la temperatura di equilibrio.
Calcolare la variazione di entropia.
Soluzione
Abbiamo:

$$\Delta S = n_A C_p \ln \frac{T}{T_A} + n_B C_p \ln \frac{T}{T_B},$$

essendo

$$n_A = \frac{pV_A}{RT_A},\ n_B = \frac{pV_B}{RT_B}, C_p = \frac{5}{2}R,\ V = V_A + V_B$$
$$n = n_A + n_B,\ T = \frac{pV}{nR}$$

I valori numerici sono:

$$n_A = 0.173, n_B = 0.120,\ T = 332\,\mathrm{K}$$

Da ciò segue:

$$\Delta S \simeq 2 \cdot 10\,\mathrm{cal}\,/\,\mathrm{K}$$

Esercizio 11

In un mezzo elastico si genera un'onda stazionaria caratterizzata da 4 ventri e 4 nodi per ogni metro.
Scrivere l'equazione delle due onde piane trasversali componenti, sapendo che la velocità di propagazione nel mezzo elastico è di 400 m / s

***

Soluzione
Poichè la distanza tra due ventri o tra due nodi consecutivi è $\lambda/2$ risulterà:

$$4\frac{\lambda}{2} = 1\,\mathrm{m},$$

da cui:

$$\lambda = 0.50\,\mathrm{m}$$

Inoltre:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{400}{0.5} = 800\,\mathrm{Hz}$$

L'onda stazionaria è:

$$f\left(x,t\right) = 2A\sin\left(kx + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$$

e risulterà dall'interferenza delle due onde rispettivamente progressiva e regressiva:

$$f_1\left(x,t\right) = A\sin\left(4\pi x - 800t + \phi_1\right)$$
$$f_1\left(x,t\right) = A\sin\left(4\pi x + 800t + \phi_2\right)$$