

Esercizio 1

[File scaricato da <http://www.extrabyte.info>]

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2 \quad (1)$$

Soluzione

La derivata prima è:

$$f'(x) = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$$

Determiniamo i punti estremali¹:

$$f'(x) = 0 \iff x = 1$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \neq 1$$

Cioè f è strettamente crescente in $x_0 = 1$, per cui tale punto non è di estremo relativo. Si conclude che la funzione assegnata è priva di estremi relativi.

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5 \quad (2)$$

Esercizio 2

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5 \quad (3)$$

Soluzione

La derivata prima è:

$$f'(x) = 6(x^2 + x - 2)$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x^2 + x - 2 = 0 \iff x = -2, 1$$

¹I *punti estremali* sono gli zeri della derivata prima. Non è detto però che siano punti estremanti (cioè punti di estremo relativo). In altri termini:

$f'(x_0) = 0 \not\iff (x_0 \text{ è punto di estremo relativo})$

Quindi abbiamo i punti estremali:

$$x_0 = -2, x'_0 = 1$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è preferibile studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x^2 + x - 2 > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-2, 1)$. Da ciò segue che:

$$x_0 = -2 \text{ è punto di massimo relativo, e } f(x_0) = 25$$

$$x'_0 = 1 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(x'_0) = -2$$

Esercizio 3

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x^2(x - 12)^2 \tag{4}$$

Soluzione

La derivata prima è:

$$f'(x) = 4x(x - 12)(x - 6)$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0, 6, 12$$

Quindi abbiamo i punti estremali:

$$x_0 = 0, x'_0 = 6, x''_0 = 12$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x^2 + x - 2 > 0 \iff x \in (0, 6) \cup (12, +\infty)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(0, 6) \cup (12, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, 0) \cup (6, 12)$. Da ciò segue che:

$$x_0 = 0 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(0) = 0$$

$$x'_0 = 6 \text{ è punto di massimo relativo, e } f(6) = 1296$$

$$x''_0 = 12 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(12) = 0$$

Esercizio 4

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3 \quad (5)$$

Soluzione

La derivata prima è:

$$f'(x) = 2(x-1)(x-2)^2(3x^2 - 5x + 1)$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 1, x = 2, 3x^2 - 5x + 1 = 0$$

Quindi abbiamo i punti estremali:

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6}, x_2 = 1, x_3 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6}, x_4 = 2$$

Anzichè calcolare la derivata terza, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff (x-1)(x-2)^2(3x^2 - 5x + 1) > 0 \iff \\ &\iff x \in \left(\frac{5 - \sqrt{13}}{6}, 1\right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{6}, +\infty\right) \end{aligned}$$

Cioè f è strettamente crescente in $\left(\frac{5 - \sqrt{13}}{6}, 1\right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{13}}{6}, +\infty\right)$ ed è strettamente decrescente in $\left(-\infty, \frac{5 - \sqrt{13}}{6}\right) \cup \left(1, \frac{5 + \sqrt{13}}{6}\right)$. Da ciò segue che:

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \text{ è punto di minimo relativo, e } f(x_1) = \frac{-587 - 143\sqrt{13}}{1458}$$

$$x_2 = 1 \text{ è punto di massimo relativo, e } f(x_2) = 0$$

$$x_3 = \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \text{ è punto di minimo relativo, e } f(x_3) = \frac{-587 + 143\sqrt{13}}{1458}$$

Esercizio 5

Esprimere $a \in (0, +\infty)$ come somma di due termini tali che il loro prodotto sia massimo.

Soluzione

Poniamo:

$$a = x + \xi \quad (6)$$

Risulta:

$$x\xi = x(a-x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \quad (7)$$

La funzione (7) è definita in \mathbb{R} , ma per la condizione $a > 0$ dobbiamo considerare la restrizione di f all'intervallo $(0, a)$. Determiniamo quindi gli estremi assoluti di f in tale intervallo. La derivata prima è:

$$f'(x) = a - 2x$$

Quindi abbiamo il punto estremo:

$$x_0 = \frac{a}{2},$$

che è manifestamente punto di massimo assoluto per f , quindi ridefiniamo:

$$x_{\max} = \frac{a}{2} \quad (8)$$

Ciò implica:

$$\xi = a - x = \frac{a}{2} \quad (9)$$

Si conclude deve essere:

$$a = \frac{a}{2} + \frac{a}{2},$$

affinchè il prodotto dei termini sia massimo

Esercizio 6

Sia Γ un filo di ferro di lunghezza l . Manipolare Γ in modo da ottenere un rettangolo \mathcal{R} di area massima.

Soluzione

Siano l_1 e l_2 i lati del rettangolo ottenuto manipolando Γ . Evidentemente:

$$l = 2(l_1 + l_2) \quad (10)$$

La sua area è

$$A = l_1 l_2 \quad (11)$$

Tenendo conto della (10):

$$A = \frac{l_1}{2}(l - 2l_1) \quad (12)$$

Poniamo $x = l_1$:

$$A(x) = \frac{x}{2}(l - 2x) \quad (13)$$

Determiniamo il massimo assoluto della funzione $A(x)$ in $(0, \frac{l}{2})$. A tale scopo, calcoliamo la derivata prima:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{l}{2} - 2x$$

Quindi abbiamo il punto estremo:

$$x_0 = \frac{l}{4},$$

che è manifestamente punto di massimo assoluto per $A(x)$, quindi:

$$l_{1,\max} = \frac{l}{4} \quad (14)$$

Da ciò segue che il rettangolo di area massima che può essere ottenuto da Γ , è un quadrato di lato $\frac{l}{4}$.

Esercizio 7

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 8}} \quad (15)$$

Soluzione

La funzione è definita in \mathbb{R} . La derivata prima è:

$$f'(x) = -\frac{4x}{\sqrt{(x^2 + 8)^3}}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0$$

Quindi abbiamo il punto estremo:

$$x_0 = 0$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 0)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ ed è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$. Da ciò segue che:

$$x_0 = 0 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(0) = \sqrt{2}$$

Esercizio 8

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}} \quad (16)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$. La derivata prima è:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \frac{x}{(x^2 - 4)^{1/3}} \\ &= \frac{x^2 - 12}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^4}} \end{aligned}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm 2\sqrt{3}$$

Quindi abbiamo il punto estremo:

$$x_1 = -2\sqrt{3}, \quad x_2 = 2\sqrt{3}$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}, +\infty\right)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(-\infty, -2\sqrt{3}) \cup (2\sqrt{3}, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$. Da ciò segue che:

$$x_1 = -2\sqrt{3} \text{ è punto di massimo relativo, e } f(x_1) = -\sqrt{3}$$

$$x_2 = 2\sqrt{3} \text{ è punto di minimo relativo, e } f(x_2) = \sqrt{3}$$

Esercizio 9

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x - \ln(1+x) \quad (17)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-1, +\infty)$. La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{x}{1+x}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0$$

Quindi abbiamo il punto estremo:

$$x_0 = 0$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (0, +\infty)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-1, 0)$. Da ciò segue che:

$$x_0 = 0 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(0) = 0$$

Esercizio 10

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x - \ln(1+x) \quad (18)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-1, +\infty)$. La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{x}{1+x}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0$$

Quindi abbiamo il punto estremo:

$$x_0 = 0$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (0, +\infty)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(0, 1)$. Da ciò segue che:

$$x_0 = 0 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(0) = 0$$

Esercizio 11

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x \ln x \tag{19}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$. La derivata prima è:

$$f'(x) = \ln x + 1$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{1}{e}$$

Quindi abbiamo il punto estremo:

$$x_0 = \frac{1}{e}$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(\frac{1}{e}, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(0, \frac{1}{e})$. Da ciò segue che:

$$x_0 = \frac{1}{e} \text{ è punto di minimo relativo, e } f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$$

Esercizio 12

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x \ln^2 x \quad (20)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$. La derivata prima è:

$$f'(x) = \ln^2 x + \ln x$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff \ln^2 x + \ln x = 0$$

Basta porre $t = \ln x$ e risolvere l'equazione di secondo grado: $t(t+2) = 0$, che dà: $t = 0, t = -2$, cioè: $x = 1, x = e^{-2}$.

Quindi abbiamo i punti estremali:

$$x_1 = \frac{1}{e^2}, x_2 = 1$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff_{t=\ln x} t(t+2) > 0 \iff t < -2, t > 0 \iff x \in \left(0, \frac{1}{e^2}\right) \cup (1, +\infty)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(0, \frac{1}{e^2}) \cup (1, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(\frac{1}{e^2}, 1)$.
Da ciò segue che:

$$\begin{aligned} x_1 = \frac{1}{e^2} & \text{ è punto di massimo relativo, e } f(x_1) = \frac{4}{e^2} \\ x_2 = 1 & \text{ è punto di minimo relativo, e } f(x_2) = 0 \end{aligned}$$

Esercizio 13

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = xe^x \quad (21)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$. La derivata prima è:

$$f'(x) = e^x(1+x)$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = -1$$

Quindi abbiamo il punto estremo:

$$x_0 = -1$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-1, +\infty)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(-1, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$. Da ciò segue che:

$$x_0 = -1 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(x_0) = -\frac{1}{e}$$

Esercizio 14

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x^2 e^{-x} \tag{22}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$. La derivata prima è:

$$f'(x) = x e^{-x} (2 - x)$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0, x = 2$$

Quindi abbiamo i punti estremali:

$$x_1 = 0, x_2 = 2$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (0, 2)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(0, 2)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Da ciò segue che:

$$x_1 = 0 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(x_1) = 0$$

$$x_2 = 2 \text{ è punto di massimo relativo, e } f(x_2) = \frac{4}{e^2}$$

Esercizio 15

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = 2 \sin 2x + \sin 4x \quad (23)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$. Trattandosi di una funzione periodica, conviene riferirsi al suo intervallo di periodicità. A tale scopo determiniamo il periodo fondamentale di (23). Scriviamo:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

essendo:

$$f_1(x) = 2 \sin 2x, \quad f_2(x) = \sin 4x$$

Le funzioni f_1 e f_2 sono periodiche di periodo:

$$T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi, \quad T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (24)$$

Ora, per definizione di funzione periodica, deve essere:

$$f(x + kT) = f(x) \iff f_1(x + kT) + f_2(x + kT) = f_1(x) + f_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (25)$$

La (25) è verificata se e solo se i periodi T, T_1, T_2 sono legati da una relazione del tipo:

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2, \quad \text{con } n_1, n_2 \in \mathbb{N} - \{0\} \quad (26)$$

Infatti:

$$f_1(x + k' T_1) + f_2(x + k'' T_2) = f_1(x) + f_2(x),$$

essendo $k' = kn_1, k'' = kn_2, \forall k \in \mathbb{Z}$. La (26) implica $n_2 = 2n_1$, donde:

$$T = n_1 T_1 = 2n_1 T_2$$

Il periodo fondamentale si ottiene per $n_1 = 1$:

$$T = T_1 = 2T_2 = \pi$$

Si conclude che la funzione assegnata è periodica di periodo π . Perciò l'intervallo di periodicità è $X_0 = [0, \pi]$.

La derivata prima è:

$$f'(x) = 4 \cos 2x + 4 \cos 4x$$

Determiniamo i punti estremali. A tale scopo eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = 2x,$$

ottenendo:

$$f'(t) = 4 \cos t + 4 \cos 2t$$

Ma $\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$, donde:

$$f'(t) = 4(2 \cos^2 t + \cos t - 1) \quad (27)$$

Da ciò segue che gli zeri della $f'(t)$ sono le radici dell'equazione trigonometrica:

$$2 \cos^2 t + \cos t - 1 = 0 \quad (28)$$

La (28) è riducibile ad un'equazione algebrica attraverso l'ulteriore cambio di variabile:

$$\eta = \cos t,$$

da cui:

$$2\eta^2 + \eta - 1 = 0 \iff \eta = -1, \frac{1}{2}$$

Ripristiniamo la variabile x : $\cos t = \frac{1}{2} \implies t = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$, poichè ci riferiamo all'intervallo $[0, 2\pi]$ per ciò che riguarda la variabile t , e tale intervallo corrisponde a $x \in [0, \pi]$, poichè $x = \frac{t}{2}$.
Quindi:

$$\eta = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

L'altra radice: $\eta = -1 \implies t = \pi \implies x = \frac{\pi}{2}$.

Quindi abbiamo i punto estremali:

$$x = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{5}{6}\pi$$

Studiamo il segno di $f'(x)$ attraverso la (27):

$$f'(t) > 0 \iff 2 \cos^2 t + \cos t - 1 > 0 \iff \eta < -1, \eta > \frac{1}{2}$$

Osserviamo che $\eta < -1 \iff \cos t < -1$, che è priva di soluzioni, per cui resta la seconda:

$$\cos t > \frac{1}{2} \implies 0 \leq t < \frac{\pi}{3}, \quad \frac{5}{3}\pi < t \leq 2\pi \iff 0 \leq x < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5}{6}\pi < x \leq \pi$$

Cioè f è strettamente crescente in $[0, \frac{\pi}{6}) \cup (\frac{5}{6}\pi, \pi]$ ed è strettamente decrescente in $[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$.
Da ciò segue che gli estremi relativi in $[0, \pi]$ sono:

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ è punto di massimo relativo, e } f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \frac{5}{6}\pi \text{ è punto di minimo relativo, e } f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Inoltre $x = \frac{\pi}{2}$ non è punto estremante poichè la funzione è ivi decrescente. In $(-\infty, +\infty)$ gli estremi relativi sono:

$$M_k \left(\pi \left(k + \frac{1}{6} \right), \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \\ m_k \left(\pi \left(k + \frac{5}{6} \right), -\frac{3\sqrt{3}}{2} \right), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Esercizio 16

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \tag{29}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 1$$

Quindi abbiamo il punto estremo:

$$x_0 = 1$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (1, +\infty)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(1, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, 1)$. Da ciò segue che:

$$x_0 = 1 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(1) = e$$

Quindi il minimo relativo è $m(1, e)$.

Esercizio 17

Determinare gli estremi assoluti della funzione:

$$f(x) = x^3 \tag{30}$$

nell'intervallo $A = [-1, 3]$

Soluzione

Per il teorema di Weierstrass:

$$f \in C^0([-1, 3]) \implies \exists \min_A f, \max_A f \quad (31)$$

Iniziamo a determinare gli eventuali estremi relativi, ricercando poi gli estremi assoluti tra questi. La derivata prima è

$$f'(x) = 3x^2,$$

per cui l'unico punto estremo è:

$$x_0 = 0$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \neq 0$$

Cioè f è crescente in $x_0 = 0$. Da ciò segue che x_0 non è punto di estremo relativo. Quindi gli estremi assoluti vanno ricercati tra i valori assunti agli estremi dell'intervallo A . Precisamente, in forza della crescita di f , si ha:

$$x_1 = -1 \text{ è punto di minimo assoluto, e } f(-1) = -1$$

$$x_2 = 3 \text{ è punto di massimo assoluto, e } f(3) = 27$$

Con ovvio significato dei simboli:

$$m(-1, -1), M(3, 27)$$

Esercizio 18

Determinare gli estremi assoluti della funzione:

$$f(x) = \arccos x$$

nel proprio insieme di esistenza.

Soluzione

La funzione è definita in $X = [-1, 1]$.

Per il teorema di Weierstrass:

$$f \in C^0([-1, 1]) \implies \exists \min_X f, \max_X f \quad (32)$$

Iniziamo a determinare gli eventuali estremi relativi, ricercando poi gli estremi assoluti tra questi. La derivata prima è

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Risulta:

$$\forall x \in (-1, 1), f'(x) < 0$$

donde f è priva di estremi relativi, ed è strettamente decrescente in X . Gli estremi assoluti vanno perciò ricercati tra gli estremi di X .

Precisamente, in forza della decrescenza di f , si ha:

$$\begin{aligned}x_1 = -1 \text{ è punto di massimo assoluto, e } f(-1) = \pi \\x_2 = 1 \text{ è punto di minimo assoluto, e } f(1) = 0\end{aligned}$$

Con ovvio significato dei simboli:

$$m(0, 1), M(-1, \pi)$$

Esercizio 19

All'istante $t_0 = 0$ un sommergibile (B) si trova a una distanza d_0 ad est di un cacciatorpediniere (A). Il sommergibile naviga verso ovest alla velocità v_B , mentre il cacciatorpediniere naviga verso sud alla velocità v_A .

Determinare l'istante t_1 in cui il sommergibile si trova alla minima distanza dal cacciatorpediniere.

Si trascuri la curvatura terrestre, assumendo che il moto avvenga in un piano.

Soluzione

Assumiamo un sistema di assi cartesiani Oxy con origine nella posizione del cacciatorpediniere all'istante $t_0 = 0$. Le equazioni del moto di quest'ultimo sono:

$$\begin{cases}x_A(t) = 0 \\y_A(t) = -v_A t\end{cases},$$

poichè per ipotesi il cacciatorpediniere compie un moto rettilineo ed uniforme verso sud, quindi nel verso delle y decrescenti.

Le equazioni del moto del sommergibile sono:

$$\begin{cases}x_B(t) = x_0 - v_B t \\y_B(t) = 0\end{cases},$$

poichè per ipotesi il sommergibile compie un moto rettilineo ed uniforme verso ovest, quindi nel verso delle x decrescenti.

La distanza tra sommergibile e cacciatorpediniere è:

$$\begin{aligned}
 d(t) &= \sqrt{[x_A(t) - x_B(t)]^2 + [y_A(t) - y_B(t)]^2} \\
 &= \sqrt{(x_0 - v_B t)^2 + v_A^2 t^2}
 \end{aligned}
 \tag{33}$$

Dobbiamo minimizzare la funzione $d(t)$. A tale scopo calcoliamo la derivata prima:

$$\dot{d}(t) = \frac{(v_A^2 + v_B^2)t - x_0 v_B}{d(t)}
 \tag{34}$$

I punti estremali di $d(t)$ sono le radici dell'equazione $\dot{d}(t) = 0$, cioè:

$$t_1 = \frac{v_B x_0}{v_A^2 + v_B^2}$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$\dot{d}(t) > 0 \iff t \in (t_1, +\infty)$$

Da cui segue che t_1 è punto di minimo relativo per la funzione $d(t)$. Inoltre:

$$\begin{aligned}
 0 < d_1 = d(t_1) &= \frac{x_0 v_A}{\sqrt{v_A^2 + v_B^2}} < x_0 = d(0) \\
 \nexists t \in [0, +\infty) \mid d(t) &= 0
 \end{aligned}$$

Quindi t_1 è punto di minimo assoluto per $d(t)$, cioè l'istante in cui il sommergibile si trova alla minima distanza dal cacciatorepediniere. La distanza minima è:

$$d_{<} = d(t_1) = \frac{x_0 v_A}{\sqrt{v_A^2 + v_B^2}}
 \tag{35}$$

Esercizio 20

Esprimere $a > 0$ come somma di due numeri tali che il prodotto di uno dei numeri per il quadrato dell'altro sia massimo.

Soluzione

Scriviamo:

$$a = x + (a - x)$$

Dobbiamo massimizzare il prodotto:

$$f(x) = x(a - x)$$

A tale scopo calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = x^3 - 2ax^2 + a^2x$$

I punti estremali di $f(x)$ sono le radici dell'equazione:

$$f'(x) = 0$$

Cioè:

$$x_1 = \frac{a}{3}, \quad x_2 = a$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in \left(0, \frac{a}{3}\right) \cup (a, +\infty)$$

Da ciò segue che $x_1 = \frac{a}{3}$ è punto di massimo relativo per $f(x)$. Inoltre $f(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, per cui x_1 è punto di massimo assoluto. Si conclude che la decomposizione richiesta è:

$$a = \frac{a}{3} + \frac{2}{3}a$$

Esercizio 21

Determinare gli estremi assoluti della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} \tag{36}$$

nel proprio insieme di esistenza.

Soluzione

La funzione è definita in \mathbb{R} .

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$$

Quindi abbiamo i punto estremali:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 1$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-1, 1)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(-1, 1)$. Da ciò segue che:

$$x_1 = -1 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 1 \text{ è punto di massimo relativo, e } f(1) = \frac{1}{2}$$

È facile convincersi che i suddetti punti sono di estremo assoluto, quindi:

$$m\left(-1, -\frac{1}{2}\right), M\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

Esercizio 22

Mostrare che la funzione:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \quad (37)$$

è priva di estremi relativi.

Soluzione

La funzione è definita in $\mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

Risulta:

$$\forall x, f'(x) \neq 0$$

Quindi la funzione è priva di estremi relativi.

Esercizio 23

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x^3 - 3px + 9 \quad (38)$$

Soluzione

La derivata prima è:

$$f'(x) = 3(x^2 - p)$$

Distinguiamo i casi:

1. $p < 0 \implies (f'(x) = 3(x^2 + |p|) \neq 0 \forall x) \implies \nexists$ estremi relativi

2. $p > 0 \implies f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{p}$

$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -\sqrt{p}) \cup (\sqrt{p}, +\infty)$

$x_1 = -\sqrt{p}$ è punto di massimo relativo, mentre $x_2 = \sqrt{p}$ è punto di minimo relativo:

$$M(-\sqrt{p}, q + 2p\sqrt{p})$$

$$m(\sqrt{p}, q - 2p\sqrt{p})$$

Esercizio 24

Dimostrare che un punto di minimo relativo della funzione:

$$f(x) = \sum_{k=1}^n (c_k - x)^2, \quad (39)$$

è dato da:

$$x_{\min} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k$$

Soluzione

La derivata prima è:

$$f'(x) = 2 \sum_{k=1}^n (x - c_k) = 2 \left(nx - \sum_{k=1}^n c_k \right)$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff nx - \sum_{k=1}^n c_k = 0 \iff x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k$$

Quindi abbiamo il punto estremo:

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (x_0, +\infty)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(x_0, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, x_0)$. Da ciò segue che:

$$x_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n c_k \stackrel{def}{=} x_{\min} \text{ è punto di minimo relativo}$$

Esercizio 25

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = 2x - \frac{250}{x^2} \quad (40)$$

Soluzione

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 250}{x^2}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 5$$

Quindi abbiamo il punto estremo:

$$x_0 = 5$$

Anzichè calcolare la derivata seconda, è più semplice studiare il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (5, +\infty)$$

Cioè f è strettamente crescente in $(5, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, 5)$. Da ciò segue che:

$$x_0 = 5 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(5) = 75$$

Esercizio 26

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = (x - 2)^{2/3} \quad (41)$$

Soluzione

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{2}{3(x-2)^{1/3}}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff \frac{2}{3(x-2)^{1/3}} = 0 \text{ mai!}$$

Osserviamo però che la funzione non è derivabile in $x_0 = 2$, e si ha che f è strettamente crescente in $(2, +\infty)$ poichè è ivi $f'(x) > 0$, mentre è strettamente decrescente in $(-\infty, 2)$. Si conclude che $x_0 = 2$ è punto di minimo relativo.

Esercizio 27

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = \cos 2x + 2 \cos x \quad (42)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$. Trattandosi di una funzione periodica, conviene riferirsi al suo intervallo di periodicità. A tale scopo determiniamo il periodo fondamentale di (42). Scriviamo:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

essendo:

$$f_1(x) = \cos 2x, \quad f_2(x) = 2 \cos x$$

Le funzioni f_1 e f_2 sono periodiche di periodo:

$$T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi, \quad T_2 = 2\pi \quad (43)$$

Ora, per definizione di funzione periodica, deve essere:

$$f(x + kT) = f(x) \iff f_1(x + kT) + f_2(x + kT) = f_1(x) + f_2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (44)$$

La (44) è verificata se e solo se i periodi T , T_1 , T_2 sono legati da una relazione del tipo:

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2, \quad \text{con } n_1, n_2 \in \mathbb{N} - \{0\} \quad (45)$$

Infatti:

$$f_1(x + k' T_1) + f_2(x + k'' T_2) = f_1(x) + f_2(x),$$

essendo $k' = kn_1$, $k'' = kn_2$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Sostituendo nella (45) i valori di T_1 e T_2 , si ottiene: $n_1 = 2n_2$, donde:

$$T = 2n_2 T_1 = n_2 T_2$$

Il periodo fondamentale si ottiene per $n_2 = 1$:

$$T = 2T_1 = T_2 = 2\pi$$

Si conclude che la funzione assegnata è periodica di periodo 2π . Perciò l'intervallo di periodicità è $X_0 = [0, 2\pi]$.

La derivata prima è:

$$f'(x) = -2(\sin x + \sin 2x)$$

Determiniamo i punti estremali:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \sin x + \sin 2x = 0 \iff \sin x (1 + 2 \cos x) = 0 \\ &\iff \sin x = 0, \quad \cos x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ottenendo nell'intervallo $[0, 2\pi]$:

$$x = 0, \quad x = \pi, \quad x = 2\pi, \quad x = \frac{2}{3}\pi, \quad x = \frac{4}{3}\pi$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff \sin x (1 + 2 \cos x) < 0$$

Da ciò si ottengono gli intervalli di crescita/decrecenza. Precisamente, f è strettamente crescente in $(\frac{2}{3}\pi, \pi) \cup (\frac{4}{3}\pi, \pi)$ ed è strettamente decrescente in $(0, \frac{2}{3}\pi) \cup (\pi, \frac{4}{3}\pi)$. Da ciò segue che gli estremi relativi in $[0, 2\pi]$ sono:

$$\begin{aligned} x = 0 &\text{ è punto di massimo relativo, e } f(0) = 3 \\ x = \frac{2}{3}\pi &\text{ è punto di minimo relativo, e } f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{3}{2} \\ x = \pi &\text{ è punto di massimo relativo e } f(\pi) = -1 \\ x = \frac{4}{3}\pi &\text{ è punto di minimo relativo e } f\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

In $(-\infty, +\infty)$ i punti di estremo relativi sono:

$$x_k = k\pi \text{ punti di massimo relativo } \forall k \in \mathbb{Z}$$

Quindi i massimi relativi:

$$M_k \left(k\pi, 1 + 2(-1)^k \right)$$

I rimanenti sono:

$$\begin{aligned} x'_k &= \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \\ x''_k &= \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \end{aligned}$$

che possono essere incorporati in un'unica formula:

$$x'_k = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$$

Quindi i minimi relativi:

$$m_k^\pm \left(\pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, -\frac{3}{2} \right)$$

Esercizio 28

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = \cos 2x + \cos^2 x \quad (46)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$. Trattandosi di una funzione periodica, conviene riferirsi al suo intervallo di periodicità. A tale scopo determiniamo il periodo fondamentale di (46). Scriviamo:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

essendo:

$$f_1(x) = \cos 2x, \quad f_2(x) = \cos^2 x$$

Quindi è $T = \pi$. La derivata prima è:

$$f'(x) = -3 \sin 2x$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff 2x = k\pi \iff x = k\frac{\pi}{2}$$

ottenendo nell'intervallo $[0, \pi]$:

$$x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad x = \pi$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff \sin x \cos x < 0$$

Da ciò si ottengono gli intervalli di crescita/decrecenza. Precisamente, f è strettamente crescente in $(0, \frac{\pi}{2})$ ed è strettamente decrescente in $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Da ciò segue che gli estremi relativi in $[0, 2\pi]$ sono:

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(0) = 2 \\ x = \frac{\pi}{2} \text{ è punto di massimo relativo, e } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{aligned}$$

In $(-\infty, +\infty)$ i punti di estremo relativi sono:

$$x_k = k\pi \text{ punti di minimo relativo } \forall k \in \mathbb{Z}$$

Quindi i minimi relativi:

$$m_k(k\pi, 2)$$

I punti di massimo relativo sono:

$$x'_k = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2}(2k+1)$$

Quindi i massimi relativi:

$$M_k\left(\frac{\pi}{2}(2k+1), -1\right)$$

Esercizio 29

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = \sin x + \cos x \quad (47)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$. Trattandosi di una funzione periodica di periodo 2π , conviene riferirsi al suo intervallo di periodicità; ad esempio $[0, 2\pi]$.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

ottenendo nell'intervallo $[0, 2\pi]$:

$$x = \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{5}{4}\pi$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff \cos x < \sin x$$

Da ciò si ottengono gli intervalli di crescita/decrecenza. Precisamente, f è strettamente crescente in $(0, \frac{\pi}{4}) \cup (\frac{5}{4}\pi, 2\pi)$ ed è strettamente decrescente in $(\frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi)$. Da ciò segue che gli estremi relativi in $[0, 2\pi]$ sono:

$$\begin{aligned} x = \frac{\pi}{4} &\text{ è punto di minimo relativo, e } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \\ x = \frac{5\pi}{4} &\text{ è punto di massimo relativo, e } f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

In $(-\infty, +\infty)$ i punti di estremo relativo sono:

$$x_k = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ punti di massimo relativo } \forall k \in \mathbb{Z}$$

Quindi i minimi relativi:

$$M_k \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \sqrt{2} \right)$$

I punti di minimo relativo sono:

$$x'_k = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

Quindi i minimi relativi:

$$M_k \left(\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, -\sqrt{2} \right)$$

Esercizio 30

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x - \arctan x \tag{48}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \neq 0$$

Da ciò segue che $x_0 = 0$ non è punto estremante. Si conclude che la funzione assegnata è priva di estremi relativi.

Esercizio 31

Determinare gli estremi assoluti della funzione:

$$f(x) = \sqrt{x(10-x)},$$

nel proprio insieme di esistenza.

Soluzione

La funzione è definita in $X = [0, 10]$. Trattandosi di un intervallo compatto, per il teorema di Weirestrass, esistono minimo e massimo assoluti. Ricerchiamoli tra gli estremi relativi.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{5-x}{2f(x)}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 5$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x > 5$$

Da ciò segue che la funzione è strettamente crescente in $(5, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, 5)$. Quindi $x = 5$ è punto di massimo relativo. Inoltre $\forall x \in X$, $f(x) \geq 0$ e $f(0) = f(10) = 0$. Si conclude che il massimo assoluto è $M(5, 5)$ mentre il minimo assoluto è l'origine delle coordinate $(0, 0)$ o equivalentemente il punto $(10, 0)$.

Esercizio 32

Discutere l'esistenza degli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{(a+x)(b+x)}, \tag{49}$$

al variare di a e b in $\mathbb{R} - \{0\}$.

Soluzione

La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{-a, -b\}$.

La derivata prima è:

$$f'(x) = -\frac{x^2 - ab}{(a+x)^2(b+x)^2}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff \frac{x^2 - ab}{(a+x)^2(b+x)^2} = 0$$

Supponendo che sia $a \neq b$, consideriamo due casi distinti:

1. $ab < 0$

$$\nexists x \mid f'(x) = 0 \implies \nexists \text{ estremi relativi}$$

2. $ab > 0$

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{ab}$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\sqrt{ab}, \sqrt{ab})$$

Quindi:

$$x_1 = -\sqrt{ab} \text{ è punto di minimo relativo, e } f(x_1) = -\frac{\sqrt{ab}}{(a-\sqrt{ab})(b+\sqrt{ab})}$$

$$x_2 = \sqrt{ab} \text{ è punto di massimo relativo, e } f(x_2) = \frac{\sqrt{ab}}{(a-\sqrt{ab})(b+\sqrt{ab})}$$

Perciò se $ab > 0$:

$$m \left(-\sqrt{ab}, -\frac{\sqrt{ab}}{(a-\sqrt{ab})(b+\sqrt{ab})} \right)$$

$$M \left(\sqrt{ab}, \frac{\sqrt{ab}}{(a-\sqrt{ab})(b+\sqrt{ab})} \right)$$

Se invece $a = b$:

$$f'(x) = -\frac{x-a}{(a+x)^3}$$

Ora l'unico punto estremo è:

$$x_0 = a$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \iff \frac{x-a}{(a+x)^3} < 0 \tag{50}$$

Distinguiamo i due casi:

1. $a > 0$

Il segno del rapporto (50) è tale che $f'(x) > 0$ in $(-a, a)$, donde $x = a$ è punto di massimo relativo, mentre il punto $x = -a$ non appartiene a X .

2. $a < 0$

Ora $f'(x) > 0$ in $(a, -a)$, donde $x = a$ è punto di minimo relativo.

Riassumendo:

$ab < 0 \implies \nexists$ estremi relativi

$$ab > 0 \implies m \left(-\sqrt{ab}, -\frac{\sqrt{ab}}{(a - \sqrt{ab})(b + \sqrt{ab})} \right), M \left(\sqrt{ab}, \frac{\sqrt{ab}}{(a - \sqrt{ab})(b + \sqrt{ab})} \right)$$

$$a = b > 0 \implies M \left(a, \frac{1}{4a} \right)$$

$$a = b < 0 \implies m \left(a, \frac{1}{4a} \right)$$

Esercizio 32

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = \frac{1 + 2x \arctan x}{1 + x^2} \quad (51)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = \mathbb{R}$.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{2(1 - x^2) \arctan x}{(1 + x^2)^2}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff (1 - x^2) \arctan x = 0$$

Quindi:

$$x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

Da ciò segue che la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ ed è strettamente decrescente in $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Quindi:

$x_1 = -1$ è punto di massimo relativo, e $f(x_1) = -1$
 $x_2 = 0$ è punto di minimo relativo, e $f(x_2) = 1$
 $x_2 = -x_1$ è punto di massimo relativo, e $f(x_2) = f(x_1) = 1$

Con ovvio significato dei simboli:

$$M_1\left(-1, \frac{2+\pi}{4}\right), m(0, 1), M_2\left(1, \frac{2+\pi}{4}\right)$$

Esercizio 33

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = x^x \tag{52}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$.

La derivata prima² è:

$$f'(x) = x^x (\ln x + 1)$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff \ln x + 1 = 0 \iff x = \frac{1}{e}$$

Quindi l'unico punto estremo è:

$$x_0 = \frac{1}{e}$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (x_0, +\infty)$$

Da ciò segue che la funzione è strettamente crescente in $(x_0, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, x_0)$. Quindi:

$$x_0 = e^{-1} \text{ è punto di minimo relativo, e } f(x_1) = (e^{-1})^{\frac{1}{e}} = e^{-\frac{1}{e}}$$

Con ovvio significato dei simboli:

$$m\left(e^{-1}, e^{-\frac{1}{e}}\right)$$

Esercizio 34

²Conviene calcolarla con il metodo della derivata logaritmica.

Esercizio n. 439

<http://www.extrabyte.info>

Determinare gli estremi assoluti della funzione:

$$f(x) = \sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}, \quad (53)$$

nel proprio insieme di definizione.

Soluzione

La funzione è definita in $X = [-2, 2]$. Quindi per il teorema di Weirestrass, questa funzione è dotata di estremi assoluti.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}}{2\sqrt{4-x^2}}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff \frac{\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}}{\sqrt{4-x^2}} = 0 \text{ mai!}$$

$\min_X f$ e $\max_X f$ vanno ricercati tra i valori assunti agli estremi, ottenendo, con ovvio significato dei simboli:

$$m(-2, 2), M(2, 2)$$

Esercizio 35

Determinare gli estremi relativi delle funzioni:

$$f(x) = |x-4|, \quad g(x) = -\sqrt[3]{x^2} \quad (54)$$

Soluzione

Esplicitando il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x-4, & \text{se } x \geq 4 \\ 4-x, & \text{se } x < 4 \end{cases}$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} \exists I^-(4) = (4-\delta, 4) \mid x \in I^-(4) \implies f(x) > f(4) &\implies \left(\begin{array}{l} f \text{ è strettamente decrescente} \\ \text{a sinistra in } x_0 = 4 \end{array} \right) \\ \exists I^+(4) = (4, 4+\delta) \mid x \in I^+(4) \implies f(x) > f(4) &\implies \left(\begin{array}{l} f \text{ è strettamente crescente} \\ \text{a destra in } x_0 = 4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Si conclude che $x_0 = 4$ è un punto di massimo relativo per la funzione $f(x)$.

Nel punto x_0 la funzione non è derivabile.

La derivata della funzione $g(x)$ è:

$$g'(x) = -\frac{2}{\sqrt[3]{x}},$$

per cui non è derivabile in $x_0 = 0$. D'altro canto:

$$\begin{aligned} \exists I^-(0) = (-\delta, 0) \mid x \in I^-(0) \implies f(x) < f(0) = 0 &\implies \left(\begin{array}{l} f \text{ è strettamente crescente} \\ \text{a sinistra in } x_0 = 0 \end{array} \right) \\ \exists I^+(0) = (0, \delta) \mid x \in I^+(0) \implies f(x) < f(0) &\implies \left(\begin{array}{l} f \text{ è strettamente decrescente} \\ \text{a destra in } x_0 = 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Si conclude che $x_0 = 0$ è punto di massimo relativo per la funzione $g(x)$.

Esercizio 36

Si consideri un semicerchio di raggio r . Tra gli infiniti trapezi isosceli ivi inscritti, si dimostri che quello di area massima è il semiesagono regolare.

Soluzione

Siano A, B, C, D i vertici di un qualunque trapezio isoscele inscritto nel semicerchio. Consideriamo l'angolo \widehat{BOC} e indichiamo con x la sua misura in radianti. Detto H il punto medio del segmento \overline{DC} :

$$\begin{aligned} \overline{HC} &= r \cos x \\ \overline{OH} &= r \sin x \end{aligned}$$

L'area del trapezio è:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot \overline{OH} \\ &= r^2 \sin x (1 + \cos x) \end{aligned}$$

Quindi dobbiamo massimizzare la funzione di x :

$$S(x) = r^2 \sin x (1 + \cos x), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$S(x)$ è continua in un intervallo compatto, quindi per il teorema di Weirestrass è ivi dotata di minimo e massimo assoluti.

Ricerchiamo il massimo assoluto tra gli estremi relativi. Se la ricerca fallisce passiamo ai valori assunti dalla funzione agli estremi dell'intervallo.

La derivata prima è:

$$\frac{dS}{dx} \stackrel{\text{def}}{=} S'(x) = r^2 (2 \cos^2 x + \cos x - 1)$$

Gli zeri della derivata sono:

$$\begin{aligned} S'(x) = 0 &\iff 2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0 \\ &\iff \cos x = -1, \cos x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La soluzione $\cos x = -1$ è da scartare in quanto $\notin [0, \frac{\pi}{2}]$. La seconda è $x_0 = \frac{\pi}{3}$ ed è manifestamente un punto di massimo relativo. Abbiamo inoltre $S(x_0) = 3r^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$. Determiniamo ora i valori assunti agli estremi:

$$S(0) = 0, S\left(\frac{\pi}{2}\right) = r^2$$

cioè $S(x_0) > S(0)$, $S(x_0) > S\left(\frac{\pi}{2}\right)$, per cui x_0 è punto di massimo assoluto. A ciò corrisponde:

$$\overline{HC} = \frac{r}{2} \implies \overline{DC} = r,$$

da cui deduciamo che il trapezio isoscele di area massima inscritto nel semicerchio di raggio r , è il semi-esagono regolare ivi inscritto.

Esercizio 37

Dimostrare che tra gli infiniti parallelepipedi retti a base quadrata, in cui la somma dei tre spigoli vale a , quello di volume massimo è il cubo di spigolo $\frac{a}{3}$.

Soluzione

Sia x la lunghezza di uno dei due spigoli uguali. Deve essere:

$$x + x + y = a \implies y = a - 2x,$$

essendo y la lunghezza del terzo spigolo.

Il volume è:

$$V(x) = x^2(a - 2x) \text{ per } x \in \left[0, \frac{a}{2}\right]$$

Dobbiamo massimizzare la funzione $V(x)$. Calcoliamo la derivata prima:

$$\frac{dV}{dx} \stackrel{\text{def}}{=} V'(x) = 2x(a - 3x)$$

Gli zeri di $V'(x)$ sono:

$$V'(x) = 0 \iff x = 0, x = \frac{a}{3}$$

Studiamo il segno della derivata:

$$V'(x) > 0 \iff x(a - 3x) > 0 \iff x \in \left(0, \frac{a}{3}\right)$$

Da ciò segue che $x_0 = \frac{a}{3}$ è punto di massimo relativo. Per il teorema di Weirestrass $V(x)$ è dotata di minimo e massimo assoluti in $\left[0, \frac{a}{2}\right]$.

Risulta:

$$V(x_0) = \frac{a^3}{27} > V(0) = V\left(\frac{a}{2}\right) = 0,$$

donde x_0 è punto di massimo assoluto. Si conclude che il parallelepipedo richiesto è il cubo di spigolo $\frac{a}{3}$.

Esercizio 38

Tra gli infiniti rettangoli inscritti in un cerchio di raggio r , determinare quello di area massima.

Soluzione

Siano x e y le lunghezze dei due lati. Il rettangolo è inscritto nel cerchio di raggio r , per cui:

$$x^2 + y^2 = 4r^2,$$

donde:

$$y = \sqrt{4r^2 - x^2}$$

Quindi l'area è:

$$S(x) = xy = x\sqrt{4r^2 - x^2}$$

Dobbiamo massimizzare la funzione $S(x)$ in $[0, 2r]$. Calcoliamo la derivata prima:

$$\frac{dS}{dx} \stackrel{def}{=} S'(x) = 2 \frac{2r^2 - x^2}{\sqrt{4r^2 - x^2}}$$

Gli zeri di $S'(x)$ sono:

$$S'(x) = 0 \iff |x| = r\sqrt{2}$$

La soluzione accettabile è $x = r\sqrt{2}$. Inoltre per $x \in (0, r\sqrt{2}) \implies S'(x) > 0$, cioè $x_0 = r\sqrt{2}$ è punto di massimo relativo.

Per il teorema di Weirestrass $V(x)$ è dotata di minimo e massimo assoluti in $[0, 2r]$.

Risulta:

$$S(x_0) = 2r^2 > S(0) = S(2r) = 0,$$

donde x_0 è punto di massimo assoluto. Si conclude che il rettangolo richiesto è il quadrato di lato $r\sqrt{2}$.

Esercizio 39

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^4} \quad (55)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0$$

Quindi l'unico punto estremo è:

$$x_0 = 0$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (0, +\infty)$$

Da ciò segue che la funzione è strettamente crescente in $(0, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$. Quindi:

$$x_0 = 0 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(0) = 0$$

Notiamo che si tratta di un minimo assoluto, poiché $f(x) > 0 \forall x \neq 0$, e $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
N.B. In questo caso non è possibile utilizzare il metodo della derivata seconda, poiché non esiste la derivata seconda in $x = 0$. Infatti $f''(x) = \frac{4}{9\sqrt[3]{x^2}}$

Esercizio 40

Tra gli infiniti rettangoli di perimetro $2p$, dimostrare che quello di area massima è il quadrato.

Soluzione

Se x e y sono le lunghezze dei lati di un qualunque rettangolo di perimetro $2p$, deve essere:

$$2x + 2y = 2p \implies x + y = p$$

L'area di tale rettangolo è:

$$S(x) = xy = x(p - x) \quad \text{per } x \in [0, p]$$

Dobbiamo massimizzare la funzione $S(x)$. La derivata prima è:

$$S'(x) = p - 2x$$

I punti estremali sono le radici dell'equazione:

$$S'(x) = 0 \iff x = \frac{p}{2}$$

Studiamo il segno della derivata:

$$S'(x) > 0 \iff x < \frac{p}{2}$$

Da ciò segue che $S(x)$ è strettamente crescente per $x < \frac{p}{2}$ e strettamente decrescente per $x > \frac{p}{2}$, quindi $x_0 = \frac{p}{2}$ è punto di massimo relativo. Ed è punto di massimo assoluto, poichè $S(x_0) = \frac{p^2}{4} > S(0) = S(p) = 0$.

Risulta $y_0 = p - x_0 = \frac{p}{2} = x_0$, cioè si tratta del quadrato di lato $\frac{p}{2}$.

Esercizio 41

Tra gli infiniti triangoli rettangoli la cui somma dei cateti vale a , dimostrare che quello di ipotenusa minima è il triangolo isoscele.

Soluzione

Se x e y sono le lunghezze dei cateti di un qualunque triangolo rettangolo la cui somma dei cateti vale a , quindi:

$$x + y = a, \quad \text{con } x \in [0, a]$$

Se b è la lunghezza dell'ipotenusa:

$$\begin{aligned} b^2 &= x^2 + (a - x)^2 \\ &= 2x^2 - 2ax + a^2 \end{aligned}$$

Dobbiamo massimizzare la funzione $f(x)$:

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} b^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$$

nell'intervallo compatto $[0, a]$.

La derivata prima è:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x - 2a \\ &= 2(2x - a) \end{aligned}$$

I punti estremali sono le radici dell'equazione:

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{a}{2}$$

Studiamo il segno della derivata:

$$S'(x) > 0 \iff x > \frac{a}{2}$$

Da ciò segue che $f(x)$ è strettamente crescente per $x > \frac{a}{2}$ e strettamente decrescente per $x < \frac{a}{2}$, quindi $x_0 = \frac{a}{2}$ è punto di minimo relativo. Ed è punto di minimo assoluto, poichè $f(x_0) = \frac{a^2}{2} < f(0) = f(a) = a^2$.

Il triangolo richiesto ha i cateti di lunghezza: $x_0 = y_0 = \frac{a}{2}$.

Esercizio 42

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{3} + \sqrt[3]{2-x} \tag{56}$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{(2-x)^2} - 1}{3\sqrt[3]{(2-x)^2}}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff \sqrt[3]{(2-x)^2} - 1 = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \\ &\iff x = 1, x = 3 \end{aligned}$$

Quindi i punti estremali sono:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff x^2 - 4x + 3 > 0 \\ &\iff x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \end{aligned}$$

Da ciò segue che la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(1, 3)$. Quindi:

$$\begin{aligned} x_1 = 1 &\text{ è punto di massimo relativo, e } f(1) = \frac{1}{3} \\ x_2 = 3 &\text{ è punto di minimo relativo, e } f(3) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 43

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x} - \ln x \quad (57)$$

Soluzione

La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{1-x}{x^2}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 1$$

Quindi l'unico punto estremo è:

$$x_0 = 1$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff_{x \in X} x \in (0, 1)$$

Da ciò segue che la funzione è strettamente crescente in $(0, 1)$ ed è strettamente decrescente in $(1, +\infty)$. Quindi:

$$x_0 = 1 \text{ è punto di massimo relativo, e } f(1) = 1$$

Esercizio 44

Determinare gli estremi assoluti della funzione:

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1 \quad (58)$$

nei seguenti intervalli:

1. $A = [-1, 5]$
2. $B = [-10, 12]$

Soluzione

La derivata prima è:

$$f'(x) = 6(x^2 + x - 2)$$

Determiniamo i punti estremali³:

$$f'(x) = 0 \iff x = 1$$

Quindi i punto estremali sono:

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 1$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

Da ciò segue che la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-2, 1)$. Quindi:

$$x_1 = -2 \text{ è punto di massimo relativo, e } f(x_1) = 21$$

$$x_2 = 1 \text{ è punto di minimo relativo, e } f(x_2) = -6$$

Esaminiamo ora i due casi:

1. $A = [-1, 5]$

Risulta $x_1 \notin A$, mentre $f(-1) = 14$, $f(5) = 266$, donde i minimi e massimi assoluti sono:

$$\max_A f = 266, \quad \min_A f = 14$$

Quindi:

$$M(5, 266), \quad m(-1, 14)$$

2. $B = [-10, 12]$

Risulta $x_1 \in B$, ed è punto di massimo relativo con $f(x_1) = 21$, ma $f(12) = 3745$, donde x_1 non è punto di massimo assoluto.

Il massimo assoluto in B è:

$$\max_B f = 3745 \implies M(12, 3745)$$

Il punto $x_2 = 1$ è punto di minimo relativo con $f(x_2) = -6$, ma $f(-10) = -1579$, donde x_2 non è punto di minimo assoluto.

Il minimo assoluto in B è:

$$\min_B f = -1579 \implies m(-10, -1579)$$

³I *punti estremali* sono gli zeri della derivata prima. Non è detto però che siano punti estremanti (cioè punti di estremo relativo). In altri termini:

$$f'(x_0) = 0 \not\iff \begin{cases} x_0 \text{ è punto di estremo relativo} \\ \text{e la funzione è ivi derivabile} \end{cases}$$

Esercizio 45

Assegnato il trinomio di secondo grado

$$f(x) = x^2 + bx + c \quad (59)$$

determinare i valori dei coefficienti b, c tali che $y_{\min} = f(1) = 3$.

Soluzione

La derivata prima è:

$$f'(x) = 2x + b$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = -\frac{b}{2}$$

ed è manifestamente punto di minimo assoluto.

Deve essere:

$$\begin{cases} -\frac{b}{2} = 1 \\ f(1) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -2 \\ b + c = 2 \end{cases} \iff b = -2, c = 4$$

Esercizio 46

Dimostrare che l'insieme delle soluzioni della disequazione:

$$e^x > 1 + x \quad (60)$$

è $\mathbb{R} - \{0\}$.

Soluzione

Definiamo:

$$f(x) \stackrel{def}{=} e^x - (1 + x)$$

La derivata prima è:

$$f'(x) = e^x - 1$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff e^x = 1 \iff x = 0$$

ed è manifestamente punto di minimo relativo.

Inoltre:

$$f(0) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

donde $x = 0$ è punto di minimo assoluto. Quindi per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) > f(0) = 0 \iff e^x > 1 + x$

Esercizio 47

Dimostrare che l'insieme delle soluzioni della disequazione:

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \tag{61}$$

è $\mathbb{R} - \{0\}$.

Soluzione

Definiamo:

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

La derivata prima è:

$$f'(x) = -\sin x + x$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff \sin x = x \iff x = 0$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \iff \sin x > x \iff x > 0$$

Quindi la funzione è strettamente crescente in $(0, +\infty)$ ed è manifestamente decrescente in $(-\infty, 0)$, per cui $x = 0$ è punto di minimo relativo. Inoltre:

$$f(0) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

donde $x = 0$ è punto di minimo assoluto. Quindi per ogni $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, $f(x) > f(0) = 0 \iff \cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$

Esercizio 48

Determinare il minimo della somma di due numeri reali e positivi, tali che uno sia il reciproco dell'altro.

Soluzione

Il quesito può formularsi nel seguente modo:

$$\exists x \in (0, +\infty) \mid x + \frac{1}{x} = \min ? \quad (62)$$

Per determinare l'eventuale minimo, definiamo la funzione:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad (63)$$

per cui il minimo richiesto è il minimo assoluto della (63) nell'intervallo $(0, +\infty)$.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \underset{x \in (0, +\infty)}{\iff} x = 1$$

Quindi l'unico punto estremo è $x_0 = 1$. Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \underset{x \in (0, +\infty)}{\iff} x \in (0, 1)$$

Da ciò segue che f è strettamente crescente in $(0, 1)$ ed è strettamente decrescente in $(1, +\infty)$, per cui $x_0 = 1$ è punto di massimo relativo. Per verificare che è punto di massimo assoluto, confrontiamo il valore $f(x_0) = 2$, con quello assunto in $x = 0$ e con il valore asintotico. Ma in $x = 0$ la funzione non è definita, risultando:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty,$$

mentre il valore asintotico è infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

Perciò $x_0 = 1$ è punto di massimo assoluto. Il valore del massimo è $f(1) = 2$. Si conclude che il massimo richiesto vale 2, e si ottiene per $x = 1$.

Esercizio 49

Determinare gli estremi assoluti della funzione:

$$f(x) = \tan x + \cot x, \quad (64)$$

nell'intervallo $(0, \frac{\pi}{2})$.

Soluzione

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} x = \frac{\pi}{4}$$

Quindi abbiamo l'unico punto estremo nell'intervallo assegnato:

$$x_0 = \frac{\pi}{4}$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \iff \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} > 0 \iff_{x \in (0, \frac{\pi}{2})} (\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x) > 0$$

Nell'intervallo $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ il prodotto $(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x)$ è positivo per $x \in (0, \frac{\pi}{4})$. Quindi x_0 è punto di massimo relativo. Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$$

Si conclude che $x_0 = \frac{\pi}{4}$ è punto di massimo assoluto per $f(x)$. Quindi: $M(\frac{\pi}{4}, 2)$.

Esercizio 50

Determinare il massimo valore assunto dal prodotto di due numeri aventi somma positiva assegnata.

Soluzione

Il problema si formula nel seguente modo: siano $x, y \in \mathbb{R} \mid x + y = a > 0$. La somma è:

$$f(x) = xy = x(a - x) = ax - x^2$$

Dobbiamo perciò massimizzare la funzione $f(x)$. La derivata prima è:

$$f'(x) = a - 2x,$$

che si annulla per

$$x_0 = \frac{a}{2}$$

x_0 è manifestamente punto di massimo assoluto per f (è l'equazione di una parabola concava verso l'alto, giacchè $a > 0$). Quindi:

$$\max(x \cdot y) = \frac{a^2}{4},$$

che corrisponde a $x_0 = y_0 = \frac{a}{2}$, cioè pari alla loro semisomma.

Esercizio 51

Tra gli infiniti cilindri inscritti in un cono circolare retto assegnato, trovare quello di massima superficie laterale.

Soluzione

Sia $\overline{OC} = h$ l'altezza del cilindro, e sia d il diametro di base. Indichiamo poi con x il diametro di base di un qualunque cilindro inscritto al cono, e con y la sua altezza. L'intersezione tra un piano contenente l'asse del cono e il cono medesimo, è un triangolo. Facendo un disegno è facile convincersi che l'intersezione con il cilindro e con il cono genera due triangoli simili, per cui:

$$\frac{\frac{d}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{h}{h-y}, \quad (65)$$

da cui:

$$y = \frac{h}{d}(d-x), \text{ con } x \in [0, d] \quad (66)$$

Si osservi che per $x = 0$ il cilindro degenera nel segmento \overline{OC} , e per $x = d$ il cilindro degenera nel cerchio di diametro d .

Ora, la superficie laterale del cilindro inscritto è:

$$S = \pi xy \quad (67)$$

Tenendo conto della (66) otteniamo:

$$S(x) = \frac{\pi hx}{d}(d-x) = \frac{\pi h}{d}(xd - x^2) \quad (68)$$

Dobbiamo massimizzare la funzione $S(x)$ nell'intervallo compatto $[0, \pi]$.

La derivata prima è:

$$S'(x) = \frac{\pi h}{d} (d - 2x)$$

I punti estremali:

$$S'(x) = 0 \iff x = \frac{d}{2},$$

ed è manifestamente punto di massimo assoluto per $S(x)$ in $[0, d]$. Si conclude che tra gli infiniti cilindri inscritti nel cono di diametro d e altezza h , quello di superficie laterale massima ha base di diametro: $x_0 = \frac{d}{2}$ e altezza $y_0 = \frac{h}{d} (d - x_0) = \frac{h}{2}$.

Esercizio 52

Tra gli infiniti cilindri inscritti in un cono circolare retto assegnato, trovare quello di massima superficie totale.

Soluzione

Sia $\overline{OC} = h$ l'altezza del cilindro, e sia d il diametro di base. Indichiamo poi con x il diametro di base di un qualunque cilindro inscritto al cono, e con y la sua altezza. L'intersezione tra un piano contenente l'asse del cono e il cono medesimo, è un triangolo. Facendo un disegno è facile convincersi che l'intersezione con il cilindro e con il cono genera due triangoli simili, per cui:

$$\frac{\frac{d}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{h}{h - y}, \quad (69)$$

da cui:

$$y = \frac{h}{d} (d - x), \text{ con } x \in [0, d] \quad (70)$$

Si osservi che per $x = 0$ il cilindro degenera nel segmento \overline{OC} , e per $x = d$ il cilindro degenera nel cerchio di diametro d .

Ora, la superficie totale del cilindro inscritto è:

$$S_t(x) = \pi xy + 2\pi \left(\frac{x}{2}\right)^2 \quad (71)$$

Tenendo conto della (70) otteniamo:

$$S_t(x) = \frac{\pi}{2d} [(d - 2h)x^2 + (2d \cdot h)x] \quad (72)$$

Dobbiamo massimizzare la funzione $S_t(x)$ nell'intervallo compatto $[0, \pi]$.

La derivata prima è:

$$S'_t(x) = \frac{\pi}{d} [(d - 2h)x + d \cdot h]$$

I punti estremali:

$$S'_t(x) = 0 \iff x = \frac{d \cdot h}{2h - d} \stackrel{\text{def}}{=} x_0,$$

Deve essere $x_0 \in (0, d)$, quindi:

$$0 < \frac{d \cdot h}{2h - d} < d \iff d \in (0, h) \iff h > d$$

Ciò implica che la (72) può essere riscritta come:

$$S_t(x) = \frac{\pi}{2d} [-|d - 2h|x^2 + (2d \cdot h)x],$$

che è l'equazione di una parabola concava verso il basso, per cui il punto x_0 è punto di massimo assoluto in $[0, d]$. Quindi:

$$x_{\max} = \frac{d \cdot h}{2h - d} \quad (73)$$

Si conclude che tra gli infiniti cilindri inscritti nel cono di diametro d e altezza h , quello di superficie laterale massima ha base di diametro: $x_{\max} = \frac{d \cdot h}{2h - d}$ e altezza $y_0 = \frac{h}{d}(d - x_{\max}) = \frac{(h-d)h}{2h-d}$.

Esercizio 53

Sia Σ un foglio di forma circolare. Ricavare da Σ un settore circolare in modo da poter generare un cono di volume massimo (una volta ritagliato il settore circolare, questo viene arrotolato per formare un cilindro).

Soluzione

Sia R il raggio di Σ . Indichiamo con x la misura in radianti dell'angolo al centro del settore circolare $\Sigma' \subset \Sigma$. La lunghezza dell'arco sarà quindi Rx . Arrotolando Σ' si forma un cono di perimetro di base Rx e apotema R . Quindi la sua altezza è:

$$h = \sqrt{R^2 + r^2} \quad (74)$$

Se r è il raggio di base:

$$Rx = 2\pi r \implies r = \frac{Rx}{2\pi} \quad (75)$$

Il volume del cono è:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Per le (74)-(75):

$$V(x) = \frac{R^2}{24\pi^2} f(x),$$

essendo

$$f(x) = x^2 \sqrt{4\pi^2 - x^2}, \text{ con } x \in [0, 2\pi]$$

Dobbiamo perciò massimizzare la funzione $f(x)$ in $[0, 2\pi]$. La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{x(8\pi^2 - 3x^2)}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$$

Determiniamo gli zeri:

$$f'(x) = 0 \begin{matrix} \longleftarrow \\ \xrightarrow{x \geq 0} \end{matrix} x = 0, x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Il punto $x = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$ è manifestamente di massimo assoluto, poichè è di massimo relativo e $f(0) = f(2\pi) = 0$. Quindi il settore circolare richiesto ha angolo al centro:

$$x_{\max} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}},$$

che espresso in gradi:

$$x_{\max}^0 \simeq 294^\circ$$

Esercizio 54

Assegnati due punti A e B , determinare su una retta r , perpendicolare alla retta congiungente A con B , un punto P tale che il segmento \widehat{AB} sia visto da P sotto un angolo massimo.

Soluzione

Sia $O \in r \cap r'$, essendo r' la retta ortogonale a r . Poniamo: $a = \overline{OA}$, $b = \overline{OB}$, $x = \overline{OP}$ con $a < b$. Indichiamo poi con α l'angolo \widehat{APB} , con β l'angolo \widehat{OAP} e con γ l'angolo \widehat{OBP} . Deve essere:

$$\alpha + \gamma + \pi - \beta = \pi \implies \alpha = \beta - \gamma$$

Inoltre:

$$\tan \beta = \frac{x}{a}, \quad \tan \gamma = \frac{x}{b}$$

Quindi:

$$\alpha(x) = \arctan \frac{x}{a} - \arctan \frac{x}{b}$$

Dobbiamo massimizzare la funzione $\alpha(x)$. La derivata prima è:

$$\alpha'(x) = \frac{(a-b)(x^2-ab)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

Gli zeri della derivata sono:

$$\alpha'(x) = 0 \iff x = \pm\sqrt{ab}$$

Ma $a < b$ quindi:

$$\alpha'(x) = -\frac{|b-a|(x^2-ab)}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$$

Perciò:

$$\alpha'(x) > 0 \iff x^2 - ab < 0 \iff x \in (-\sqrt{ab}, \sqrt{ab})$$

Da ciò segue che la funzione è strettamente crescente in $(-\sqrt{ab}, \sqrt{ab})$ ed è strettamente decrescente in $\mathbb{R} - (-\sqrt{ab}, \sqrt{ab})$. Quindi:

$$x_{\min} = -\sqrt{ab} \text{ è punto di minimo relativo}$$

$$x_{\max} = \sqrt{ab} \text{ è punto di massimo relativo}$$

$x_{\max} = \sqrt{ab}$ è anche punto di massimo assoluto poichè:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$$

Esercizio 55

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = \sinh(x^2 - 1) \tag{76}$$

Soluzione

La funzione è definita su tutto \mathbb{R} .

La derivata prima è:

$$f'(x) = 2x \cosh(x^2 - 1)$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x \cosh(x^2 - 1) \iff x = 0$$

Il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x > 0$$

Quindi f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$. Si conclude che $x = 0$ è punto di minimo relativo con $f(0) = 0$.

Esercizio 56

Determinare gli estremi relativi della funzione:

$$f(x) = \cosh(x^2 - 1) \tag{77}$$

Soluzione

La funzione è definita su tutto \mathbb{R} .

La derivata prima è:

$$f'(x) = 2x \sin(x^2 - 1)$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x \sin(x^2 - 1) \iff x = 0, |x| = 1$$

Il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff x \sin(x^2 - 1) \iff x(x^2 - 1) > 0$$

Quindi f è strettamente crescente in $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Perciò:

$x = 0$ è punto di massimo relativo con $f(0) = \cosh 1$

$x = \pm 1$ punti di minimo relativo con $f(\pm 1) = 1$

Esercizio 57

Determinare gli estremi assoluti della funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)}, \tag{78}$$

in $A = [-\frac{1}{2}, 2]$

Soluzione

Il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza degli estremi assoluti di f in A , essendo questo un intervallo compatto.

Ricerchiamoli tra gli estremi relativi e i valori assunti da f negli estremi dell'intervallo A .

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

Determiniamo i punti estremali⁴:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0$$

Il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} > 0 \iff \frac{x}{x^2-1} > 0 \underset{x \in A}{\iff} x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (1, 2]$$

Quindi nell'intervallo A , f è strettamente crescente in $[-\frac{1}{2}, 0) \cup (1, 2]$ ed è strettamente decrescente in $(0, 1)$. Quindi:

$$x = 0 \text{ è punto di massimo relativo con } f(0) = 1$$

$$x = 1 \text{ è punto di minimo relativo con } f(1) = 0$$

Osserviamo che in $x = 1$ la funzione non è derivabile:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = +\infty$$

Cioè $(1, 0)$ è una cuspid. Determiniamo i valori agli estremi:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}$$
$$f(2) = 3$$

Quindi $x = 2$ è punto di massimo assoluto in A : $M(2, 3)$, mentre $x = 1$ è punto di minimo assoluto in A : $m(1, 0)$.

⁴I *punti estremali* sono gli zeri della derivata prima. Non è detto però che siano punti estremanti (cioè punti di estremo relativo). In altri termini:

$$f'(x_0) = 0 \not\iff (x_0 \text{ è punto di estremo relativo})$$

Esercizio 58

Determinare gli estremi assoluti della funzione:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{(4-x)^2}, \quad (79)$$

in $A = [-1, 6]$

Soluzione

Il teorema di Weierstrass ci assicura l'esistenza degli estremi assoluti di f in A , essendo questo un intervallo compatto.

Ricerchiamoli tra gli estremi relativi e i valori assunti da f negli estremi dell'intervallo A .

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{2\sqrt[3]{4-x} - \sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x(4-x)}}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff (\sqrt[3]{4-x} - \sqrt[3]{x} = 0, x \neq 0, x \neq 4) \iff x = 2$$

Il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff \frac{\sqrt[3]{4-x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x(4-x)}} > 0$$

Studiamo separatamente il segno del numeratore e del denominatore.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{4-x} - \sqrt[3]{x} > 0 &\implies 4-x > x \implies x < 2 \\ \sqrt[3]{x(4-x)} > 0 &\implies x(4-x) > 0 \implies x \in (0, 4) \end{aligned}$$

Otteniamo:

$$f'(x) > 0 \iff_{x \in A} x \in (0, 2) \cup (4, 6)$$

Quindi nell'intervallo A , f è strettamente crescente in $(0, 2) \cup (4, 6)$ ed è strettamente decrescente in $(-1, 0) \cup (2, 4)$. Quindi:

$$\begin{aligned} x = 0 &\text{ è punto di minimo relativo con } f(0) = 2\sqrt[3]{2} \\ x = 2 &\text{ è punto di massimo relativo con } f(2) = 2\sqrt[3]{4} \\ x = 4 &\text{ è punto di minimo relativo con } f(4) = 2\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Osserviamo che in $x = 0$ e in $x = 4$ la funzione non è derivabile:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} f'(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 4^+} f'(x) &= +\infty \end{aligned}$$

Cioè i punti $(0, 2\sqrt[3]{2})$ e $(4, 2\sqrt[3]{2})$ sono cuspidi. Determiniamo i valori agli estremi:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 1 + \sqrt[3]{25} \\ f(6) &= \sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{4} \end{aligned}$$

Ma è $f(2) < f(6)$, quindi $x = 2$ è punto di massimo relativo ma non di massimo assoluto in A . Ivi il massimo assoluto è raggiunto nel punto $x = 6$, pertanto:

$$M\left(6, \sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{4}\right)$$

Osserviamo poi che l'altro estremo dell'intervallo, cioè $x = -1$ non può essere punto di minimo assoluto, giacché è $f(-1) = 1 + \sqrt[3]{25} > f(0) = f(4) = 2\sqrt[3]{2}$. Determiniamo eventuali punti $x \in A$ tali che $f(x) < 0$. A tale scopo determiniamo gli zeri di f in A :

$$f(x) = 0 \iff \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{(4-x)^2} = 0 \iff x^2 - 4x + 8 = 0,$$

che è priva di soluzioni reali. Dunque: $\nexists x \in A = [-1, 6] \mid f(x) = 0$, e siccome f è ivi continua ed è $f(-1) > 0$, $f(6) > 0$, segue che non cambia segno in A , cioè $\forall x \in A$, $f(x) > 0$. Si conclude che il minimo assoluto in A è assunto nel punto $x = 0$ o equivalentemente in $x = 4$:

$$m_1\left(0, 2\sqrt[3]{2}\right), m_2\left(4, 2\sqrt[3]{2}\right)$$

Esercizio 59

Determinare gli estremi assoluti della funzione:

$$f(x) = 2\sqrt{x} - x, \tag{80}$$

nel proprio insieme di definizione.

Soluzione

L'insieme di definizione è $X = [0, +\infty)$

Determiniamo gli estremi relativi.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 1$$

Il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} > 0 \iff \begin{cases} \sqrt{x} - 1 < 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Otteniamo:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (0, 1)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(0, 1)$ ed è strettamente decrescente in $(1, +\infty)$. Perciò:

$$x = 1 \text{ è punto di massimo relativo con } f(1) = 1$$

Inoltre $f(0) = 0$, e:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \implies \nexists \min_X f$$

Si conclude che $x_0 = 1$ è punto di massimo assoluto: $M(1, 1)$.

Esercizio 60

Determinare gli estremi assoluti della funzione:

$$f(x) = 2\sqrt{x+1} - x, \tag{81}$$

nel proprio insieme di definizione.

Soluzione

L'insieme di definizione è $X = [-1, +\infty)$

Determiniamo gli estremi relativi.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{1 - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0$$

Il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff \frac{1 - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} > 0 \iff \begin{cases} \sqrt{x+1} - 1 < 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$$

Otteniamo:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-1, 0)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(-1, 0)$ ed è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$. Perciò:

$$x = 0 \text{ è punto di massimo relativo con } f(0) = 2$$

Inoltre $f(-1) = 0$, e:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \implies \nexists \min_X f$$

Si conclude che $x_0 = 0$ è punto di massimo assoluto: $M(0, 2)$.

Esercizio 61

Determinare gli estremi assoluti della funzione:

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{3-x}, \quad (82)$$

nel proprio insieme di definizione.

Soluzione

L'insieme di definizione è $X = [1, 3] \implies \exists \min_X f, \max_X f$.

Determiniamo gli estremi relativi.

La derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)(3-x)}}$$

Determiniamo i punti estremali:

$$f'(x) = 0 \iff x = 2$$

Il segno di $f'(x)$:

$$f'(x) > 0 \iff \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} > 0 \iff \begin{cases} \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1} > 0 \\ (x-1)(3-x) > 0 \end{cases}$$

Otteniamo:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (1, 2)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(1, 2)$ ed è strettamente decrescente in $(2, 3)$. Perciò:

$$x = 2 \text{ è punto di massimo relativo con } f(2) = 2$$

Inoltre $\nexists x \in X \mid f(x) = 0$, e i valori assunti agli estremi di X sono:

$$f(1) = \sqrt{2}, f(3) = \sqrt{2}$$

Si conclude che $x_0 = 0$ punto di massimo assoluto: $M(0, 2)$, mentre entrambi gli estremi di X sono punti di minimo assoluti.

Esercizio 62

Determinare i punti della versiera di Agnesi:

$$y = \frac{1}{1+x^2}, \quad (83)$$

in cui il valore assoluto dell'angolo tra la retta tangente e l'asse x , sia massimo

Soluzione

Poniamo:

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1+x^2}, \text{ con } x \in (-\infty, +\infty)$$

Se $\theta(x)$ è la misura in radianti dell'angolo che la retta tangente in $P(x, f(x))$ forma con l'asse x :

$$f'(x) = \tan \theta(x),$$

donde:

$$\theta(x) = \arctan f'(x)$$

Siamo interessati al valore assoluto $|\theta(x)|$, per cui ridefiniamo l'angolo $\theta(x)$:

$$\theta(x) \stackrel{\text{def}}{=} |\arctan f'(x)|$$

La derivata $f'(x)$ è:

$$f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

donde:

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \left| -\arctan \frac{2x}{(1+x^2)^2} \right| = \left| \arctan \frac{2x}{(1+x^2)^2} \right| \\ &= \begin{cases} \arctan \frac{2x}{(1+x^2)^2}, & \text{se } x \geq 0 \\ -\arctan \frac{2x}{(1+x^2)^2}, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Trattandosi di una funzione pari, determiniamo il massimo per $x \geq 0$:

$$\begin{aligned} x \in [0, +\infty) &\implies \theta'(x) = \frac{d}{dx} \left[\arctan \frac{2x}{(1+x^2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{1 + \frac{4x^2}{(1+x^2)^4}} \cdot \frac{d}{dx} \frac{2x}{(1+x^2)^2} \\ &= 2 \frac{(1+x^2)(1-3x^2)}{(1+x^2)^4 + 4x^2}, \end{aligned}$$

che si annulla per $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, scartando la soluzione < 0 poichè stiamo considerando $x \geq 0$. Inoltre $\theta'(x) > 0$ per $x \in [0, x_0)$, per cui x_0 è punto di massimo relativo. Ed è punto di massimo assoluto, poichè $\theta(0) = 0$. Quindi il massimo assoluto di $\theta(x)$ nell'intervallo $[0, +\infty)$ è:

$$\theta_{\max} = \theta(x_0) = \arctan\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$$

In forza della parità $\theta(-x) = \theta(x)$, segue che: $\theta_{\max} = \theta(-x_0)$, per cui i punti richiesti appartenenti alla versiera di Agnesi, sono:

$$P_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right), P'_0\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$$

Esercizio 63

Inscrivere nel segmento di parabola $y^2 = 2px$ determinato dalla retta $x = a$, un rettangolo di area massima.

Soluzione

Per $x \in [0, a]$ esistono infiniti rettangoli inscritti nel segmento di parabola $y^2 = 2px$ determinato dalla retta $x = a$:

$$\mathcal{R} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a, \quad -\sqrt{2px} \leq y \leq \sqrt{2px} \right\}$$

L'area di $\mathcal{R}(x)$ è:

$$S(x) = 2(a - x)\sqrt{2px}$$

Dobbiamo ricercare il massimo assoluto della funzione $S(x)$ nell'intervallo compatto $[0, a]$. A tale scopo ricerchiamo il massimo relativo; la derivata prima è:

$$S'(x) = \sqrt{2p} \frac{a - 3x}{\sqrt{x}}$$

che si annulla per $x_0 = \frac{a}{3}$ che è un punto di massimo relativo. Ma è anche punto di massimo assoluto in $[0, a]$, poichè $S(0) = S(a) = 0$. Quindi

$$x_{\max} = \frac{a}{3}, \quad S_{\max} = \frac{4}{3}a\sqrt{\frac{2}{3}ap}$$

Il rettangolo di area massima è:

$$\mathcal{R}_{\max} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{a}{3} \leq x \leq a, \quad -\sqrt{\frac{2}{3}ap} \leq y \leq \sqrt{\frac{2}{3}ap} \right\}$$