Esercizio 998
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale:

$$\int x^{-3}\left(1+x^4\right)^{1/2}dx \tag{1}$$

***

Soluzione
Si tratta di un integrale binomio che si risolve con le condizioni di Cebyscev (o Chebyshev). Precisamente, scriviamo l'integrale nella forma:

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$$

Qui è:

$$m=-3, n=4, p=\frac{1}{2}$$

Risulta:

$$\frac{m+1}{n}+p=0,$$

onde la sostituzione da eseguire è:

$$x^{-4}+1=t^2$$

Ricaviamo x:

$$x=\left(t^2-1\right)^{-1/4}$$

Differenziando rispetto alla variabile ausiliaria t:

$$dx=-\frac{1}{2}t\left(t^2-1\right)^{-5/4}dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned}
F(t) &= \int\left(t^2-1\right)^{3/4}t\left(t^2-1\right)^{-1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)t\left(t^2-1\right)^{-5/4}dt \\
&= -\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{t^2-1}dt \\
&= -\frac{1}{2}\int\frac{t^2-1+1}{t^2-1}dt \\
&= -\frac{1}{2}\left(t+\int\frac{dt}{t^2-1}\right) \\
&= -\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+C
\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$
\begin{aligned}
F\left(x\right) &= -\frac{1}{2}\sqrt{x^{-4}+1}+\ln\sqrt{\frac{\sqrt{x^{-4}+1}+1}{\sqrt{x^{-4}+1}-1}}+C \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{1+x^{4}}+x^{2}}{\sqrt{1+x^{4}}-x^{2}}\right|-\frac{\sqrt{1+x^{4}}}{2x^{2}}+C
\end{aligned}
$$