Esercizio 996
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \sqrt[3]{x}\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}dx \tag{1}$$

***

Soluzione
Si tratta di un integrale binomio che si risolve con le condizioni di Cebyscev (o Chebyshev). Precisamente, scriviamo l'integrale nella forma:

$$\int x^m \left(a+bx^n\right)^p dx$$

Qui è:

$$m=\frac{1}{3}, n=\frac{2}{3}, p=\frac{1}{4}$$

Risulta:

$$\frac{m+1}{n}=2\in\mathbb{Z},$$

onde la sostituzione da eseguire è:

$$1+x^{2/3}=t^4$$

Ricaviamo x:

$$x=\left(t^4-1\right)^{3/2}$$

Differenziando rispetto alla variabile ausiliaria t:

$$dx=6\left(t^4-1\right)^{1/2}dt$$

L'integrale in funzione di t:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \left(t^4-1\right)^{1/2} t\cdot 6t^3 \left(t^4-1\right)^{1/2} dt \\ &= 6\int \left(t^8-t^4\right) dt \\ &= \frac{2}{3}t^9-\frac{6}{5}t^5+C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$F(x)=\frac{2}{3}\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^9}-\frac{6}{5}\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^5}+C$$