Esercizio 993
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{\sinh x+1}{\cosh x-1}dx$$

***

Soluzione
Dobbiamo esplicitare le funzioni iperboliche che compaiono nell'integrando:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sinh x+1}{\cosh x-1}dx &= \int \frac{\frac{e^x-e^{-x}}{2}+1}{\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1}dx \\
&= \int \frac{e^x-e^{-x}+2}{e^x+e^{-x}-2}dx \\
&= \int \frac{e^x-e^{-x}+2}{e^{-x}\left(e^{2x}+1-2e^x\right)}dx \\
&= \int \frac{e^x-e^{-x}+2}{\left(e^{2x}+1-2e^x\right)}e^x dx
\end{aligned}$$

Poniamo $t=e^x$, per cui:

$$e^x dx = dt$$

L'integrale in funzione di t si scrive:

$$F(t)=\int \frac{t^2+2t-1}{t(t-1)^2}dt$$

Procediamo per riduzione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}
\frac{t^2+2t-1}{t(t-1)^2} &= \frac{A}{t}+\frac{B_1}{t-1}+\frac{B_2}{(t-1)^2} \\
&= \frac{A(t-1)^2+B_1 t(t-1)+B_2 t}{t(t-1)^2} \\
&= \frac{(A+B_1)t^2+(B_2-B_1-2A)t+A}{t(t-1)^2}
\end{aligned}$$

Cioè:

$$t^2+2t-1=(A+B_1)t^2+(B_2-B_1-2A)t+A$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A + B_1 = 1 \\ -2A + B_2 - B_1 = 2 \\ A = -1 \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$A = -1, B_1 = 2, B_2 = 2$$

Quindi:

$$\frac{t^2 + 2t - 1}{t\left(t-1\right)^2} = \frac{2}{t-1} + \frac{2}{\left(t-1\right)^2} - \frac{1}{t}$$

Integrando:

$$F\left(t\right) = 2\ln|t-1| - \frac{2}{t-1} - \ln|t| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\sinh x + 1}{\cosh x - 1} dx = \ln\left(e^x - 1\right)^2 - x - \frac{2}{e^x - 1} + C$$