

**Esercizio 989**  
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{e^{3x}}{1 - e^{4x}} dx$$

\*\*\*

**Soluzione**

Scriviamo:

$$\int \frac{e^{3x}}{1 - e^{4x}} dx = \int \frac{e^{2x}}{1 - e^{4x}} e^x dx$$

Quindi poniamo  $t = e^x$ , per cui:

$$e^x dx = dt$$

L'integrale in funzione di  $t$ :

$$F(t) = \int \frac{t^2}{1 - t^4} dt$$

Integriamo per riduzione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned} \frac{t^2}{1 - t^4} &= \frac{t^2}{(1 - t)(1 + t)(1 + t^2)} \\ &= \frac{A}{1 - t} + \frac{B}{1 + t} + \frac{Ct + D}{1 + t^2} \\ &= \frac{A(1 + t)(1 + t^2) + B(1 - t)(1 + t^2) + (Ct + D)(1 - t^2)}{(1 - t)(1 + t)(1 + t^2)} \\ &= \frac{(A - B - C)t^3 + (A + B - D)t^2 + (A - B + C)t + (A + B + D)}{(1 - t)(1 + t)(1 + t^2)} \end{aligned}$$

Applicando il principio di identità dei polinomi, otteniamo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} A - B - C = 0 \\ A + B - D = 1 \\ A - B + C = 0 \\ A + B + D = 0 \end{cases} ,$$

la cui soluzione è:

$$A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}, C = 0, D = -\frac{1}{2}$$

onde:

$$\frac{t^2}{1-t^4} = \frac{1}{4(1-t)} + \frac{1}{4(1+t)} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2}$$

Integrando:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2}{1-t^4} dt &= \frac{1}{4} \ln |1-t| + \frac{1}{4} \ln |1+t| - \frac{1}{2} \arctan t + C \\ &= \frac{1}{4} \ln |1-t^2| - \frac{1}{2} \arctan t + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile  $x$ :

$$\int \frac{e^{3x}}{1-e^{4x}} dx = \frac{1}{4} \ln |1-e^{2x}| - \frac{1}{2} \arctan e^x + C$$