Esercizio 976
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale:

$$F(x) = \int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2 - 2x + 1}} \tag{1}$$

***

Soluzione
Applichiamo il procedimento standard degli integrali contenenti un trinomio di secondo grado. Precisamente, scriviamo:

$$x = a(10x - 2) + b = 10ax - 2a + b,$$

onde:

$$a = \frac{1}{10}, b = \frac{1}{5}$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned}\int \frac{xdx}{\sqrt{5x^2 - 2x + 1}} &= \frac{1}{10} \int \frac{d(5x^2 - 2x + 1)}{\sqrt{5x^2 - 2x + 1}} + \frac{1}{5} \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 2x + 1}} \\ &= \frac{1}{5}\sqrt{5x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{5} F_1(x),\end{aligned} \tag{2}$$

essendo:

$$F_1(x) \stackrel{def}{=} \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 - 2x + 1}}$$

Per calcolare $F_1(x)$ scriviamo:

$$\begin{aligned}5x^2 - 2x + 1 &= 5(x + k)^2 + l \\ &= 5\left(x^2 + 2kx + k^2\right) + l \\ &= 5x^2 + 10kx + 5k^2 + l \\ &\Longrightarrow \begin{cases} 10k = -2 \\ l + 5k^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow k = -\frac{1}{5},\ l = \frac{4}{5},\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}5x^2 - 2x + 1 &= \frac{4}{5}\left[1 + \left(\frac{5x - 1}{2}\right)^2\right] \\ F_1(x) &= \frac{\sqrt{5}}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + \left(\frac{5x-1}{2}\right)^2}}\end{aligned}$$

Poniamo $t=\frac{5x-1}{2}$:

$$F_1\left(t\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+C_1$$

Cioè:

$$\begin{aligned}F_1\left(x\right)&=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{5x-1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{5x^2-2x+1}\right|\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|5x-1+\sqrt{5}\sqrt{5x^2-2x+1}\right|-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln 2+C_1\end{aligned}$$

Sostituendo nella (2) e incorporando $-\frac{1}{\sqrt{5}}\ln 2$ nella costante di integrazione:

$$F\left(x\right)=\frac{1}{5}\sqrt{5x^2-2x+1}+\frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left|5x-1+\sqrt{5}\sqrt{5x^2-2x+1}\right|+C$$