Esercizio 971
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale:

$$\int x^2 \ln \sqrt{1-x}dx \tag{1}$$

***

Soluzione
Eseguiamo un'integrazione per parti assumendo come termine finito $\ln \sqrt{1-x}$:

$$\int \ln \sqrt{1-x}d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x} + \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{x-1}dx \tag{2}$$

Calcoliamo a parte l'integrale a secondo membro:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x-1}dx &= \int \frac{x^3-1+1}{x-1}dx = \\ &= \int \left(\frac{x^3-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right)dx \\ &= \int \left[\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right]dx \\ &= \int \left(x^2+x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx \\ &= \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+\ln|x-1|+C_1\end{aligned}$$

Sostituendo nella (2):

$$\int x^2 \ln\sqrt{1-x}dx = \frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x} - \frac{1}{6}\ln|x-1| - \frac{x^2}{18} - \frac{x^2}{12} - \frac{x}{6} + C$$