Esercizio 969
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int x\sin^2 x dx \qquad (1)$$
$$\int x\sin x^2 dx$$

***

Soluzione
Per calcolare il primo integrale svincoliamoci innanzitutto da $\sin^2 x$, utilizzando la formula di duplicazione del coseno:

$$\cos 2x = 1 - \sin^2 x,$$

da cui:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

Quindi l'integrale si scrive:

$$\begin{aligned}\int x\sin^2 x dx &= \frac{1}{2}\int x(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\int xdx - \int x\cos 2x dx\right) \qquad (2)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - F(x)\right),\end{aligned}$$

essendo:

$$F(x) = \int x\cos 2x dx$$

Integrando per parti:

$$F(x) = \int xd\left(\frac{\sin 2x}{2}\right) = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x$$

Sostituendo nella (2):

$$\int x\sin^2 x dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\sin 2x - \frac{\cos 2x}{8} + C$$

Passiamo ora al secondo integrale, "visualmente" simile al primo ma ovviamente diverso, il cui calcolo è immediato:

$$\int x\sin x^2 dx = \frac{1}{2}\int \sin x^2 d\left(x^2\right) = -\frac{1}{2}\cos x^2 + C$$