Esercizio 960
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale:

$$\int \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)dx \tag{1}$$

***

Soluzione
Utilizziamo rispettivamente le formule di sottrazione e di addizione:

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos x-\sin x\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos x+\sin x\right),\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}\int \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)dx &= \frac{1}{2}\int\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\int\cos^2 x dx-\int\sin^2 x dx\right)\end{aligned} \tag{2}$$

Calcoliamo a parte i due integrali a secondo membro:

$$\begin{aligned}\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(\cos 2x+1\right) &\Longrightarrow \int\cos^2 x dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+x\right)\\ \sin^2 x = \frac{1}{2}\left(\cos 2x-1\right) &\Longrightarrow \int\sin^2 x dx = \frac{1}{2}\left(x-\sin 2x\right)\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)dx &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+x-x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C\\ &= \frac{\sin 2x}{8}+C\end{aligned}$$