

Esercizio 959
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare l'integrale:

$$\int \cos^4 x dx \tag{1}$$

Soluzione

Utilizziamo la formula di duplicazione del coseno:

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1,$$

per ricavare $\cos^2 x$:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (\cos 2x + 1)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \frac{1}{4} \int (\cos 2x + 1)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int (\cos^2 2x + 2 \cos 2x + 1) dx \\ &= \frac{1}{4} F(x) + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{4} + C, \end{aligned} \tag{2}$$

essendo:

$$F(x) \stackrel{def}{=} \int \cos^2 2x dx$$

Poniamo $t = 2x$

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2} \int \cos^2 t dt = \frac{1}{4} \int (\cos 2t + 1) dt \\ &= \frac{1}{8} \sin 2t + \frac{t}{4} + C_1 \end{aligned}$$

Ripristinando x :

$$F(x) = \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{2}x + C_1$$

Sostituendo nella (2):

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \frac{3}{8}x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C \\ &= \frac{1}{32} (12x + 8 \sin 2x + \sin 4x) + C \end{aligned}$$