

**Esercizio 950**  
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \quad (1)$$

\*\*\*

**Soluzione**

Esprimiamo il trinomio come somma di due quadrati:

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 &= (x + k)^2 + l \\ &= x^2 + 2kx + k^2 + l \\ \implies \begin{cases} 2k = 1 \\ l + k^2 = 1 \end{cases} &\implies k = \frac{1}{2}, l = \frac{3}{4} \\ \implies x^2 + x + 1 &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4} \left[ \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1 \right] \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} &= \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \\ &= \int \frac{d\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \\ &= \ln \left| \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C_1 \\ &= \ln \left| 2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1} \right| + \underbrace{C_1 - \ln \sqrt{3}}_{=C} \\ &= \ln \left| 2x + 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C \end{aligned}$$