Esercizio 942
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale:

$$\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2} \tag{1}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$\begin{aligned} F(x) &\stackrel{def}{=} \int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2} \\ &= \int \frac{e^x dx}{e^{3x}+e^{2x}-2e^x} \end{aligned}$$

Poniamo $y=e^x$, per cui:

$$e^x dx = dy$$

L'integrale in funzione di y:

$$\begin{aligned} F(y) &= \int \frac{y dy}{y^3+y^2-2y} \\ &= \int \frac{dy}{y(y^2+y-2)} \\ &= \int \frac{dy}{y(y-1)(y+2)} \end{aligned}$$

Abbiamo così ridotto l'integrale di una funzione trascendente all'integrale di una funzione razionale regolare, quindi integriamo per decomposizione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y(y-1)(y+2)} &= \frac{A}{y}+\frac{B}{y-1}+\frac{C}{y+2} \\ &= \frac{A(y^2+y-2)+By(y+2)+Cy}{y(y-1)(y+2)} \\ &= \frac{(A+B+C)y^2+(A+2B-C)y+2A}{y(y-1)(y+2)} \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ A+2B-C=0 \\ 2A=-1 \end{cases},$$

la cui soluzione è:

$$A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{3}, C = \frac{1}{6}$$

Quindi:

$$F(y) = -\frac{1}{2}\ln|y| + \frac{1}{3}\ln|y-1| + \frac{1}{6}\ln|y+2| + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^{x} - 2} = -\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\ln|e^{x}-1| + \frac{1}{6}\ln(e^{x}+6) + C$$