Esercizio 940
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale:

$$\int e^x \sin x \sin 3x dx \tag{1}$$

***

Soluzione
Sviluppiamo $\sin x \sin 3x$ con le formule di Werner:

$$\sin x \sin 3x = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 4x)$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int e^x \sin x \sin 3x dx &= \frac{1}{2} \int e^x (\cos 2x - \cos 4x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int e^x \cos 2x dx - \int e^x \cos 4x dx \right) \end{aligned} \tag{2}$$

Calcoliamo a parte i due integrali, procedendo per parti:

$$\begin{aligned} \int e^x \cos 2x dx &= \int e^x d \left(\frac{\sin 2x}{2} \right) \\ &= \frac{e^x}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \int e^x \sin 2x dx \end{aligned}$$

Eseguiamo un'integrazione per parti su $\int e^x \sin 2x dx$:

$$\begin{aligned} \int e^x \sin 2x dx &= \int e^x d \left(-\frac{\cos 2x}{2} \right) \\ &= -\frac{e^x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \int e^x \cos 2x dx, \end{aligned}$$

che sostituita nella precedente:

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{e^x}{2} \sin 2x + \frac{e^x}{4} \cos 2x - \frac{1}{4} \int e^x \cos 2x dx,$$

che risolta rispetto a $\int e^x \cos 2x dx$:

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{2e^x}{5} \left(\sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \tag{3}$$

Passiamo all'altro integrale:

$$\int e^x \cos 4x dx = \int e^x d\left(\frac{\sin 4x}{4}\right) = \frac{e^x}{4}\sin 4x - \frac{1}{4}\int e^x \sin 4x dx$$

Eseguiamo un'integrazione per parti su $\int e^x \sin 4x dx$:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin 4x dx &= \int e^x d\left(-\frac{\cos 4x}{2}\right)\\ &= -\frac{e^x}{4}\cos 4x + \frac{1}{4}\int e^x \cos 4x dx,\end{aligned}$$

che sostituita nella precedente:

$$\int e^x \cos 4x dx = \frac{e^x}{4}\sin 4x + \frac{e^x}{16}\cos 4x - \frac{1}{16}\int e^x \cos 4x dx,$$

che risolta rispetto a $\int e^x \cos 4x dx$:

$$\int e^x \cos 2x dx = \frac{4e^x}{17}\left(\sin 4x + \frac{1}{4}\cos 2x\right) \tag{4}$$

Sostituendo le (3)-(4) nella (2):

$$\int e^x \sin x \sin 3x dx = \frac{e^x}{2}\left(\frac{2\sin 2x + \cos 2x}{5} - \frac{4\sin 4x + \cos 4x}{17}\right) \tag{5}$$