

Esercizio 933
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare l'integrale:

$$\int \sqrt{x^2 + x} dx$$

Soluzione

Scriviamo:

$$\begin{aligned} x^2 + x &= (x + k)^2 + l = x^2 + 2kx + k^2 + l \\ \implies \begin{cases} 2k = 1 \\ l + k^2 = 0 \end{cases} &\implies k = \frac{1}{2}, l = -\frac{1}{4} \\ \implies x^2 + x &= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Eseguiamo la sostituzione:

$$x + \frac{1}{2} = \cosh t,$$

donde:

$$dx = \frac{1}{2} \sinh t, \quad \sqrt{x^2 + x} = \frac{1}{2} \sinh t$$

L'integrale in funzione di t :

$$F(t) = \frac{1}{4} \int \sinh^2 t dt,$$

Esprimiamo il $\sinh^2 t$ attraverso il $\cosh 2t$:

$$\sinh^2 t = \frac{1}{2} (\cosh 2t - 1),$$

cosicché:

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{8} \int (\cosh 2t - 1) dt \\ &= \frac{1}{16} \sinh 2t - \frac{t}{8} + C \\ &= \frac{1}{8} \sinh t \cosh t - \frac{t}{8} + C \end{aligned}$$

Ora dobbiamo ripristinare la variabile x .

$$\begin{aligned} \cosh t &= 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) \\ \sinh t &= 2\sqrt{x^2 + x} \\ t &= \operatorname{arccosh} \left[2 \left(x + \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= \ln \left| 2 \left(x + \frac{1}{2} \right) + 2\sqrt{x^2 + x} \right| \\ &= \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x} \right| - \ln 2 \end{aligned}$$

Quindi

$$\int \sqrt{x^2 + x} dx = \frac{2x + 1}{4} \sqrt{x^2 + x} - \frac{1}{8} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x} \right| + C$$