Esercizio 923
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Sia γ una curva piana di equazione $y = f(x)$ tale che $f''(x) = x^2 - 1$. Trovare l'espressione analitica di $f(x)$ sapendo che γ passa per il punto $P(1,1)$ ed è ivi tangente alla retta $x + y = 1$.

***

Soluzione
La derivata prima è:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int f''(x)\,dx \\ &= \int \left(x^2 - 1\right) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x + C \end{aligned} \tag{1}$$

Quindi la funzione:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)\,dx \\ &= \int \left(\frac{1}{3}x^3 - x + C\right) dx \\ &= \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + Cx + C_1 \end{aligned} \tag{2}$$

Dobbiamo perciò determinare le costanti di integrazione C, C_1. Deve essere:

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ f'(1) = -1 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} C = -\frac{1}{3} \\ C + C_1 = \frac{17}{12} \end{cases},$$

da cui:

$$C = -\frac{1}{3},\ C_1 = \frac{7}{4}$$

Quindi:

$$f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{7}{4}$$

Tale risultato si interpreta geometricamente nel seguente modo: nel piano cartesiano xy esistono ∞^2 curve di derivata seconda $f''(x) = x^2 - 1$; esistono ∞^1 curve di derivata seconda $f''(x) = x^2 - 1$ e passanti per un assegnato punto P ;esiste una ed una sola curva di derivata seconda $f''(x) = x^2 - 1$, passante per un assegnato punto P ed ivi tangente ad una retta assegnata.