

Esercizio 921
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Determinare l'equazione della famiglia \mathcal{F} di curve di equazione $y = f(x)$ la cui pendenza nel generico punto $P(x, f(x))$ è $m = 4x^3y$. Si determini inoltre la curva $\gamma_0 \in \mathcal{F}$ passante per $P_0(0, 6)$.

Soluzione

La pendenza della curva $y = f(x)$ nel generico punto (x, y) è:

$$m = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Cioè:

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3y \quad (1)$$

La (1) è un'equazione differenziale che può essere integrata per *separazione di variabili*. Infatti, scriviamo:

$$\frac{dy}{y} = 4x^3 dx \quad (2)$$

Integriamo ambo i membri della (2):

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= 4 \int x^3 dx \\ \Leftrightarrow \ln |y| &= x^4 + C_1 \\ \Leftrightarrow y &= \pm e^{x^4 + C_1} \\ &= \underbrace{\pm e^{C_1}}_{\stackrel{\text{def}}{=} C} e^{x^4} \end{aligned}$$

Quindi l'equazione della famiglia è:

$$y = Ce^{x^4}, \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

Determiniamo ora l'equazione di γ_0 passante per $(0, 6)$: $6 = C$, quindi:

$$\gamma_0) \quad y = 6e^{x^4}$$