Esercizio 902
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x - 4\sin x - 6} \tag{1}$$

***

Soluzione
Osserviamo che:

$$\begin{aligned}\cos^2 x - 4\sin x - 6 &= 1 - \sin^2 x - 4\sin x - 6 \\ &= -\left(\sin^2 x + 4\sin x + 5\right),\end{aligned}$$

per cui:

$$\begin{aligned}F(x) &\stackrel{def}{=} \int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x - 4\sin x - 6} \\ &= -\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 4\sin x + 5} = \int \mathcal{R}(\sin x)\cos x dx,\end{aligned}$$

onde il cambio di variabile è $t = \sin x \Longrightarrow dt = \cos x dt$

$$F(t) = -\int \frac{dt}{t^2 + 4t + 5}$$

Scriviamo:

$$t^2 + 4t + 5 = t^2 + 4t + 4 + 1 = (t+2)^2 + 1,$$

quindi:

$$F(t) = -\int \frac{d(t+2)}{1 + (t+2)^2} = -\arctan(t+2) + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\cos x dx}{\cos^2 x - 4\sin x - 6} = -\arctan(\sin x + 2) + C$$