Esercizio 901
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\tan x}{1-\sin x}dx \tag{1}$$

***

Soluzione
Anche se l'integrale non è del tipo $\int \mathcal{R}(\sin x)\cos x dx$ proviamo comunque a porre $t = \sin x \Longrightarrow dx = \frac{dt}{\cos x}$, per cui:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x}{\cos x(1-\sin x)}dx &= \int \frac{tdt}{\cos^2 x(1-t)}dt \\ &= \int \frac{tdt}{(1-t^2)(1-t)} \\ &= \int \frac{tdt}{(1-t)^2(1+t)},\end{aligned}$$

quindi si procede per decomposizione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}\frac{t}{(1-t)^2(1+t)} &= \frac{A_1}{1-t} + \frac{A_2}{(1-t)^2} + \frac{B}{1+t} \\ &= \frac{A_1(1-t)(1+t) + A_2(1+t) + B(1-t)^2}{(1-t)^2(1+t)} \\ &= \frac{(-A_1+B)t^2 + (A_2-2B)t + (A_1+A_2+B)}{(1-t)^2(1+t)}\end{aligned}$$

Per il principio di idendità dei polinomi otteniamo il seguente sistema di Cramer:

$$\begin{cases} -A_1 + B = 0 \\ A_2 - 2B = 1 \\ A_1 + A_2 + B \end{cases},$$

La cui soluzione è

$$A_1 = -\frac{1}{4}, A_2 = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4},$$

quindi

$$\frac{t}{(1-t)^2(1+t)} = \frac{1}{4(t-1)} - \frac{1}{4(t+1)} + \frac{1}{2(t-1)^2}$$

Integrando:

$$\int \frac{t}{(1-t)^2(1+t)}dt = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{1}{2(t-1)} + C$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\sin x}{\cos x\,(1-\sin x)}dx = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + \frac{1}{2\,(1-\sin x)} + C$$