

Esercizio 893
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - \cos^2 x}$$

Soluzione

Conviene riscrivere l'integrale:

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - \cos^2 x} \\ &= \int \frac{1}{(\tan^2 x + 3 \tan x - 1)} \underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x}}_{=d(\tan x)} \end{aligned}$$

Eseguendo il cambio di variabile $x \rightarrow y = \tan x$:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - \cos^2 x} = \int \frac{dy}{y^2 + 3y - 1}$$

L'integrale a secondo membro è facilmente calcolabile: si procede per decomposizione in frazioni semplici, oppure scrivendo $y^2 + 3y - 1 = (y + k)^2 + l$, determinando k, l . Quindi otteniamo:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - \cos^2 x} = \frac{1}{\sqrt{13}} \ln \left| \frac{2 \tan x + 3 - \sqrt{13}}{2 \tan x + 3 + \sqrt{13}} \right| + C$$