

Esercizio 892
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x}$$

Soluzione

Qui la funzione integranda è una funzione razionale pari di $\cos x$:

$$\mathcal{R}(-\cos x) \equiv \mathcal{R}(\cos x)$$

Come è noto in questi casi il cambio di variabile è $y = \tan x$. Convieni prima riscrivere l'integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x} &= \int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x} \\ &= \int \frac{dx}{3 \tan^2 x + 5 \cos^2 x} \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \int \frac{1}{5 + 3 \tan^2 x} d(\tan x), \end{aligned}$$

Ma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 x} &= 1 + \tan^2 x \\ \frac{dx}{\cos^2 x} &= d(\tan x), \end{aligned}$$

quindi eseguendo il cambio di variabile $x \rightarrow y = \tan x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x} &= \int \frac{dy}{5 + 3y^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{15}} \int \frac{d\left(\sqrt{\frac{3}{5}}y\right)}{1 + \left(\sqrt{\frac{3}{5}}y\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{15}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \tan x\right) + C \end{aligned}$$