

Esercizio 891
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x}$$

Soluzione

Qui la funzione integranda è una funzione razionale pari di $\cos x$:

$$\mathcal{R}(-\cos x) \equiv \mathcal{R}(\cos x)$$

Come è noto in questi casi il cambio di variabile è $y = \tan x$. Conviene prima riscrivere l'integrale:

$$\int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x} = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x} + 3 \cos^2 x} dx$$

Ma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 x} &= 1 + \tan^2 x \\ \frac{dx}{\cos^2 x} &= d(\tan x), \end{aligned}$$

donde eseguendo il cambio di variabile $x \rightarrow y = \tan x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x} &= \int \frac{dy}{4 + y^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{y}{2}\right)}{1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\tan x}{2}\right) + C \end{aligned}$$