

**Esercizio 890**  
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare i seguenti integrali

$$\int \frac{3 \cos x - 2 \sin x}{3 \sin x + 2 \cos x} dx \quad (1)$$
$$\int \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x + 2 \cos x} dx$$

\*\*\*

**Soluzione**

In questi casi non conviene applicare la sostituzione universale di variabile. Infatti per il primo integrale osserviamo che:

$$d(3 \sin x + 2 \cos x) = (3 \cos x - 2 \sin x) dx, \quad (2)$$

quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{3 \cos x - 2 \sin x}{3 \sin x + 2 \cos x} dx &= \int \frac{d(3 \sin x + 2 \cos x)}{3 \sin x + 2 \cos x} \\ &= \ln |3 \sin x + 2 \cos x| + C \end{aligned}$$

Per il secondo integrale osserviamo che il denominatore della funzione integranda è lo stesso, per cui continua a valere la (2), in cui vediamo che differisce con il numeratore per il segno (-). Ciò suggerisce di esprimere il numeratore attraverso una combinazione lineare del denominatore e della sua derivata prima:

$$2 \sin x + 3 \cos x = a(3 \sin x + 2 \cos x) + b \frac{d}{dx}(3 \sin x + 2 \cos x), \quad (3)$$

onde:

$$\begin{aligned} \int \frac{3 \cos x - 2 \sin x}{3 \sin x + 2 \cos x} dx &= a \int dx + b \int \frac{d(3 \sin x + 2 \cos x)}{3 \sin x + 2 \cos x} \\ &= ax + b \ln |3 \sin x + 2 \cos x| + C \end{aligned} \quad (4)$$

A questo punto dobbiamo determinare i coefficienti  $a, b$  della combinazione lineare (3):

$$\begin{aligned} 2 \cos x + 3 \cos x &= 3a \sin x + 2a \cos x + 3b \cos x - 2b \sin x \\ &= (3a - 2b) \sin x + (2a + 3b) \cos x, \end{aligned}$$

da cui otteniamo il sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 3a - 2b = 2 \\ 2a + 3b = 3 \end{cases}$$

Risolviamolo con il metodo dei determinanti:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{12}{13}$$
$$b = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{13} = \frac{5}{13}$$

Sostituendo la soluzione  $(a, b) = (\frac{12}{13}, \frac{5}{13})$  nella (4):

$$\int \frac{3 \cos x - 2 \sin x}{3 \sin x + 2 \cos x} dx = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13} \ln |3 \sin x + 2 \cos x| + C$$