

Esercizio 888
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare il seguente integrale:

$$F(x) = \int \frac{\sin x}{1 - \sin x} dx$$

Soluzione

$$F(x) = \int \frac{\sin x - 1 + 1}{1 - \sin x} dx = -x + J(x)$$

essendo:

$$J(x) = \int \frac{dx}{1 - \sin x}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \tan \frac{x}{2},$$

donde:

$$\begin{aligned} G(t) &= \int \frac{1}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= 2 \int \frac{dt}{(t-1)^2} = -\frac{2}{t-1} + \text{const}, \end{aligned}$$

quindi:

$$G(x) = -\frac{2}{\tan \frac{x}{2} - 1} + \text{const}$$

Cosicché l'integrale vale:

$$F(x) = -x - \frac{2}{\tan \frac{x}{2} - 1} + \text{const}$$