

Esercizio 885
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}$$

Soluzione

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \tan \frac{x}{2} \tag{1}$$

Quindi

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{2}$$

Il differenziale di x è:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \tag{3}$$

In tal modo l'integrale si scrive:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 + 5 \cos x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3 + 5 \frac{1-t^2}{1+t^2}} \\ &= 2 \int \frac{dt}{3 + 3t^2 + 5 - 5t^2} \\ &= \int \frac{dt}{4 - t^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2+t}{2-t} \right| + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \tan \left(\frac{x}{2}\right)}{2 - \tan \left(\frac{x}{2}\right)} \right| + C \end{aligned}$$