Esercizio 884
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare gli integrali:

$$\int \frac{dx}{\sin x} \tag{1}$$
$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile:

$$t = \tan \frac{x}{2} \tag{2}$$

Quindi

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \tag{3}$$

Il differenziale di x è:

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2} \tag{4}$$

In tal modo il primo dei due integrali (1):

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} \\ &= \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C \\ &= \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C\end{aligned}$$

Per il secondo integrale eseguiamo lo stesso cambio di variabile, ottenendo:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = 2 \int \frac{dt}{1-t^2} + C \tag{5}$$

L'integrale a secondo membro è un integrale notevole (si calcola comunque per riduzione in frazioni semplici):

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + C,$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \frac{\tan \frac{x}{2} + 1}{\tan \frac{x}{2} - 1} \right| + C$$

Osserviamo che l'argomento del logaritmo può essere snellito attraverso le formule di addizione per la tangente. Infatti:

$$\begin{aligned}\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{1-\tan\frac{x}{2}} &= \frac{\tan\frac{x}{2}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{x}{2}\tan\frac{\pi}{4}} = \tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &\implies \left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{\tan\frac{x}{2}-1}\right| = \left|\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| = \left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|,\end{aligned}$$

per cui:

$$\int\frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$