

Esercizio 872
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare il seguente integrale:

$$F(x) = \int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} \quad (1)$$

Soluzione

Innanzitutto poniamo $y = \frac{x}{2}$, per cui:

$$F(t) = 2 \int \frac{dy}{\sin y \cos^3 y} = 2 \int \frac{1}{\sin y \cos y} \underbrace{\frac{dy}{\cos^2 y}}_{=d(\tan y)} \quad (2)$$

Ora utilizziamo le formule:

$$\frac{1}{\sin y} = \frac{(1 + \tan^2 y)^{1/2}}{\tan^2 y}, \quad \frac{1}{\cos y} = (1 + \tan^2 y)^{1/2},$$

che sostituite nella (2):

$$F(y) = 2 \int \frac{1 + \tan^2 y}{\tan y} d(\tan y)$$

Eseguiamo l'ulteriore cambio di variabile $t = \tan y$:

$$\begin{aligned} F(t) &= 2 \int \frac{1 + t^2}{t} dt \\ &= 2 \left(\int \frac{dt}{t} + \int t dt \right) \\ &= 2 \left(\ln |t| + \frac{1}{2} t^2 \right) + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x :

$$\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} = \tan^2 \frac{x}{2} + 2 \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C$$