

Esercizio 869
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Integrali del tipo

$$\int \tan^n x dx, \quad \int \cot^n x dx, \quad \text{con } n \in \mathbb{N} - \{0\} \quad (1)$$

Soluzione

Per $n = 1$ l'integrazione è immediata:

$$\begin{aligned} \int \tan x dx &= - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = - \ln |\cos x| + C \\ \int \cot x dx &= \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x| + C \end{aligned} \quad (2)$$

Per $n > 1$ utilizziamo nel caso di $\tan^n x$ la formula trigonometrica:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \implies \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

Ad esempio per $n = 2$

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \tan x - x + C \quad (3)$$

Per $n = 3$:

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x dx &= \int \tan^2 x \tan x dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \tan x dx \\ &= \int \tan x d(\tan x) - \int \tan x dx \\ &= \frac{1}{2} \tan^2 x - \int \tan x dx \end{aligned} \quad (4)$$

Tenendo conto della prima delle (2):

$$\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C \quad (5)$$

Osserviamo che tale risultato può essere riscritto come:

$$\int \tan^3 x dx = \frac{1}{2 \cos^2 x} + \ln |\cos x| + C$$

Qui abbiamo usato $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, incorporando -1 nella costante di integrazione.

Per $n = 4$:

$$\begin{aligned}
\int \tan^4 x dx &= \int \tan^2 x \tan^2 x dx \\
&= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \tan^2 x dx \\
&= \int \tan^2 x d(\tan x) - \int \tan^2 x dx \\
&= \frac{1}{3} \tan^3 x - \int \tan^2 x dx
\end{aligned}$$

Per la (3):

$$\int \tan^4 x dx = \frac{1}{3} \tan^3 x - \tan x + x + C \quad (6)$$

Per il calcolo di $\int \cot^n x dx$ si procede utilizzando:

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \implies \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

Eseguendo calcoli simili a quelli per $\tan^n x$, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int \cot^2 x dx &= -\cot x - x + C \\
\int \cot^3 x dx &= -\frac{1}{2} \cot^2 x + \ln |\sin x| + C \\
\int \cot^4 x dx &= -\frac{1}{3} \cot^3 x + \cot x + x + C
\end{aligned} \quad (7)$$