Esercizio 867
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale:

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} \tag{1}$$

***

Soluzione

Serviamoci della nota formula:

$$\sin x = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

Quindi l'integrale diventa:

$$F(x) \stackrel{def}{=} \frac{1}{32} \int \frac{dx}{\sin^5 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2}} \tag{2}$$

Eseguiamo il cambio di variabile:

$$y = \frac{x}{2}$$

da cui:

$$\begin{aligned} F(y) &= \frac{1}{16} \int \frac{dy}{\sin^5 y \cos^5 y} \\ &= \frac{1}{16} \int \frac{1}{\sin^5 y \cos^3 y} \underbrace{\frac{dy}{\cos^2 y}}_{=d(\tan y)} \end{aligned}$$

A questo punto serviamoci delle note formule trigonometriche:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^3 y} &= \left(1 + \tan^2 y\right)^{3/2} \\ \frac{1}{\sin^5 y} &= \frac{\left(1 + \tan^2 y\right)^{5/2}}{\tan^5 y} \end{aligned}$$

Quindi:

$$F(y) = \frac{1}{16} \int \frac{\left(1 + \tan^2 y\right)^4}{\tan^5 y} d(\tan y)$$

Eseguiamo l'ulteriore cambio di variabile $t = \tan y$

$$\begin{aligned}F(y) &= \frac{1}{16}\int\frac{\left(t^2+1\right)^4}{t^5}dt\\&= \frac{1}{16}\int\left(t^3+4t+\frac{6}{t}+\frac{4}{t^3}+\frac{1}{t^5}\right)dt\\&= \frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4t^4}-\frac{1}{t^2}+6\ln|t|+2t^2+4t^4\right)+C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x

$$\int\frac{dx}{\sin^5 x}=\frac{1}{16}\left(-\frac{1}{4\tan^4\frac{x}{2}}-\frac{2}{\tan^2\frac{x}{2}}+6\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+2\tan^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\tan^4\frac{x}{2}\right)+C \tag{3}$$

Tenendo conto delle note formule trigonometriche:

$$\tan\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}},\quad \cot\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \tag{4}$$

Sostituendo le (4) nelle (3) ed eseguendo le dovute semplificazioni, otteniamo:

$$\int\frac{dx}{\sin^5 x}=\frac{\cos x\left(3\cos^2 x-5\right)}{8\sin^4 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C \tag{5}$$