Esercizio 863
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare i seguenti integrali:

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} \tag{1}$$

***

Soluzione
Scriviamo:

$$F(x) = \int \frac{1}{\sin^5 x \cos x} \underbrace{\frac{dx}{\cos^2 x}}_{=d(\tan x)}$$

Inoltre:

$$\frac{1}{\cos^3 x} = \left(1 + \tan^2 x\right)^{3/2}$$
$$\frac{1}{\sin^5 x} = \frac{\left(1 + \tan^2 x\right)^{5/2}}{\tan^5 x}$$

Quindi:

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} = \int \frac{\left(1 + \tan^2 x\right)^3}{\tan^5 x} d(\tan x)$$

Poniamo $t = \tan x$

$$\begin{aligned}\int \frac{\left(1 + \tan^2 x\right)^3}{\tan^5 x} d(\tan x) &= \int \frac{\left(t^2 + 1\right)^3}{t^5} dt \\ &= \int \left(t + \frac{3}{t} + \frac{3}{t^3} + \frac{1}{t^5}\right) dt \\ &= \frac{1}{2} t^2 + 3 \ln |t| - \frac{3}{2t^2} - \frac{1}{4t^2} + C\end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x} = \frac{1}{2} \tan^2 x + 3 \ln |\tan x| - \frac{3}{2} \cot^2 x - \frac{1}{4} \cot^4 x + C$$