

Esercizio 850
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare l'integrale

$$\int \sin^8 x \cos^5 x dx \tag{1}$$

Soluzione

L'integrale proposto è del tipo:

$$\int (\sin x)^m (\cos x)^n dx, \quad \text{con } m, n \in \mathbb{Z}$$

Il caso più semplice è quello in cui uno dei due interi realtivi m, n è positivo dispari, che è proprio il caso dell'integrale proposto. Infatti scriviamo:

$$\begin{aligned} \int \sin^8 x \cos^5 x dx &= \int \sin^8 x \underbrace{\cos^4 x}_{=(1-\sin^2 x)^2} d(\sin x) \\ &= \int \sin^8 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \end{aligned}$$

Poniamo:

$$t = \sin x$$

Segue:

$$\begin{aligned} \int \sin^8 x (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) &= \int t^8 (1 - t^2)^2 dt \\ &= \int t^8 dt - 2 \int t^{10} dt + \int t^{12} dt \\ &= \frac{1}{9}t^9 - \frac{2}{11}t^{11} + \frac{1}{13}t^{13} + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x :

$$\int \sin^8 x \cos^5 x dx = \frac{1}{9} \sin^9 x - \frac{2}{11} \sin^{11} x + \frac{1}{13} \sin^{13} x + C$$