Esercizio 848
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} \tag{1}$$

***

Soluzione

Riscriviamo l'integrale:

$$F(x) = \int x^{-1}\left(1+x^5\right)^{-1/3} dx,$$

in modo da applicare le condizioni di Cebyscev (v. esercizio 846). Abbiamo: $m = -1, n = 5, p = -1/3$, per cui $\frac{m+1}{n} = 0$. Segue allora che per le condizioni di Cebyscev il cambio di variabile è:

$$1 + x^5 = t^3,$$

da cui:

$$x = \left(t^3 - 1\right)^{1/5}$$
$$dx = \frac{3}{5}t^2\left(t^3 - 1\right)^{-4/5} dt$$

Pertanto l'integrale in funzione di t è:

$$F(t) = \frac{3}{5}\int \frac{t}{t^3 - 1}dt,$$

che si calcola per riduzione in frazioni semplici:

$$\frac{t}{t^3-1} = \frac{1}{3(t-1)} - \frac{t-1}{3(t^2+t+1)}$$

Quindi:

$$F(t) = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{3}\int \frac{t-1}{t^2+t+1}dt\right)$$

L'integrale a secondo membro si calcola con i metodi noti relativi ad integrali contenenti un trinomio di secondo grado:

$$\int \frac{t-1}{t^2+t+1}dt = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+t+1\right) - \sqrt{3}\arctan\frac{1+2t}{\sqrt{3}}$$

Perciò:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}} = \frac{3}{5}\left[\sqrt{3}\arctan\frac{1+2t}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\ln\left(t^2+t+1\right)\right] + C$$
$$\text{con } t = \sqrt[3]{1+x^5}$$