Esercizio 846
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx \tag{1}$$

***

Soluzione
Si calcola applicando le **condizioni di Cebyscev** che riguardano gli integrali del tipo:

$$\int x^m (a + bx^n)^p \, dx$$

Nel nostro caso:

$$F(x) = \int x^{-1/2} \left(1 + x^{1/4}\right)^{1/3} dx,$$

per cui $m = -1/2, n = 1/4, p = 1/3$, per cui il cambio di variabile è
(v. http://www.extrabyte.info/post/integrali/irrazionale.pdf)

$$1 + x^{1/4} = t^3,$$

da cui:

$$x = \left(t^3 - 1\right)^4, dx = 12t^2 \left(t^3 - 1\right)^3$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} F(t) &= \int \left(t^3 - 1\right)^{-2} \cdot t \cdot 12t^2 \left(t^3 - 1\right)^3 dt \\ &= 12 \int t^2 \left(t^3 - 1\right) dt = 12 \left(\int t^6 dt - \int t^3 dt \right) \\ &= \frac{12}{7} t^7 - 3t^4 + C, \quad \text{con } t = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

Cioè:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{3}{7} \left(4\sqrt[4]{x} - 3\right) \sqrt[3]{\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^4} + C$$