Esercizio 845
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}} \tag{1}$$

***

Soluzione
Eseguiamo il cambio di variabile (v. esercizio 844):

$$x + 1 = \frac{1}{t},$$

da cui:

$$dx = -\frac{dt}{t^2}$$

L'integrale diventa:

$$F(t) = -\int \frac{\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t^3}\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}} = -\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

Applichiamo la formula di riduzione:

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = (At + B)\sqrt{1-t^2} + \alpha \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

Derivando primo e secondo membro rispetto alla variabile t:

$$\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} = A\sqrt{1-t^2} + (At + B) \cdot \frac{(-t)}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1-t^2}},$$

cioè:

$$t^2 = -2At^2 - Bt + A + \alpha$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} -2A = 1 \\ -B = 0 \\ A + \alpha = 0 \end{cases},$$

da cui:

$$A = -\frac{1}{2}, B = 0, \alpha = \frac{1}{2}$$

Quindi:

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\frac{t}{2}\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2} \arcsin t$$

Ripristinando la variabile x e ricordando che $F(t) = -\int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}dt$, otteniamo:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x^2+2x}} = \frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2}\arcsin \frac{1}{x+1} + C$$