Esercizio 843
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx \tag{1}$$

***

Soluzione
Tale integrale è del tipo:

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

Quindi applichiamo la formula di riduzione (v. esercizio 839)

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = X_{n-1}(x) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

Nel caso dell'integrale assegnato:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx = (Ax + B) \sqrt{x^2 - x + 1} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

Derivando primo e secondo membro:

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1}} &= A\sqrt{x^2 - x + 1} + (Ax + B) \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2 - x + 1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}} \left[4Ax^2 + (2B - 3A) x + (2A - B + 2\alpha)\right],
\end{aligned}$$

cioè:

$$2x^2 = 4Ax^2 + (2B - 3A) x + (2A - B + 2\alpha)$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} 4A = 2 \\ 2B - 3A = 0 \\ 2A - B + 2\alpha = 0 \end{cases},$$

da cui:

$$A = \frac{1}{2}, B = \frac{3}{4}, \alpha = -\frac{1}{8}$$

Quindi:

$$X_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(2x + 3)$$

Perciò:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx = \frac{1}{4}(2x+3)\sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} \tag{2}$$

L'integrale a secondo membro si calcola con i metodi degli integrali contenenti un trinomio di secondo grado. Precisamente:

$$\begin{aligned} x^2-x+1 &= (x+k)^2+l = x^2+2kx+k^2+l \\ &\implies \begin{cases} 2k=-1 \\ l+k^2=1 \end{cases} \implies k=-\frac{1}{2}, l=\frac{3}{4}, \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} x^2-x+1 &= \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right] \\ &\implies \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{d\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}dx \end{aligned}$$

Ricordiamo che:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)+C_1$$

Ponendo $t=\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ segue:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}} &= \ln\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\sqrt{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)+C_1 \\ &= \ln\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2-x+1}\right)+C_1 \\ &= \ln\left(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)+C_1-\ln\sqrt{3} \end{aligned}$$

Sostituendo nella (2) ed incorporando $C_1-\ln\sqrt{3}$ nella costante di integrazione C:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}}dx = \frac{1}{4}(2x+3)\sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8}\ln\left(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}\right)+C$$