Esercizio 841
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{1}$$

***

Soluzione

Tale integrale è del tipo:

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

Quindi applichiamo la formula di riduzione (v. esercizio 839)

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = X_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

Nel caso dell'integrale assegnato:

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E\right)\sqrt{1-x^2} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Derivando primo e secondo membro:

$$\begin{aligned}\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} &= \left(4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D\right)\sqrt{1-x^2}+ \\ &+ \left(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E\right)\frac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{aligned}x^5 &= (-5A)\,x^5 + (-4B)\,x^4 + (4A-3C)\,x^3 + (3B-2D)\,x^2 \\ &+ (2C-E)\,x + (\alpha+D)\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} -5A = 1 \\ -4B = 0 \\ 4A-3C = 0 \\ 3B-2D = 0 \\ 2C-E = 0 \\ \alpha + D = 0 \end{cases},$$

da cui:

$$A = -\frac{1}{5}, B = 0, C = -\frac{4}{15}, \alpha = 0, D = 0, E = -\frac{8}{15}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left(-\frac{x^4}{5} - \frac{4}{15}x^2 - \frac{8}{15}\right)\sqrt{1-x^2} + C \\
&= -\frac{1}{15}\left(3x^4 + 4x^2 + 8\right)\sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$