Esercizio 840
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{1}$$

***

Soluzione
Tale integrale è del tipo:

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

Quindi applichiamo la formula di riduzione (v. esercizio 839)

$$\int \frac{p_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = X_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

Cioè:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left(Ax^2+Bx+C\right)\sqrt{1-x^2} + \alpha \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2}$$

Derivando primo e secondo membro:

$$\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} = (2Ax+B)\sqrt{1-x^2} + \left(Ax^2+Bx+C\right)\frac{(-1)}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}}$$

cioè:

$$\begin{aligned} x^3 &= (2Ax+B)\left(1-x^2\right) + \left(-Ax^3-Bx^2-Cx\right) + \alpha \\ &= (-3A)\,x^3 + (-2B)\,x^2 + (2A-C)\,x + (B+\alpha) \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} -3A = 1 \\ B = 0 \\ 2A - C = 0 \\ B + \alpha = 0 \end{cases},$$

da cui:

$$A = -\frac{1}{3}, B = 0, C = -\frac{2}{3}, \alpha = 0$$

Quindi:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \left(-\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3}\right)\sqrt{1-x^2} + C \\ &= -\frac{1}{3}\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2} + C \end{aligned}$$