Esercizio 837
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{x^2 dx}{(x-1)^{10}} \tag{1}$$

: $-\frac{1}{(x-1)^9}\left(\frac{1}{7}x^2 - \frac{1}{28}x + \frac{1}{252}\right)$

***

Soluzione
Conviene applicare il metodo di Ostrogradskij. Scriviamo la formula di riduzione:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \frac{X(x)}{q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{q_2(x)}dx \tag{2}$$

Nella (2) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x)$, mentre:

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}$$

Le funzioni $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati e di grado inferiori di una unità rispetto a $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente.
Nel nostro caso è:

$$q(x) = (x-1)^{10}$$
$$q'(x) = 10(x-1)^9$$

Quindi:

$$q_1(x) = (x-1)^9 \Longrightarrow X(x) = Ax^8 + Bx^7 + Cx^6 + Dx^5 + Ex^4 + Fx^3 + Gx^2 + Hx + I$$
$$q_2(x) = x-1 \Longrightarrow Y(x) = L$$

La (2) si scrive:

$$\int \frac{dx}{(x-1)^{10}} = \frac{Ax^8 + Bx^7 + Cx^6 + Dx^5 + Ex^4 + Fx^3 + Gx^2 + Hx + I}{(x-1)^9} + \int \frac{L}{x-1}dx \tag{3}$$

Derivando primo e secondo membro della (3):

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)^{10}} = & -\frac{1}{(x-1)^{10}}[Ax^8+(8A+2B)\,x^7+(7B+3C)\,x^6+ \\ & +(6C+4D)\,x^5+(5D+5E)\,x^4+(6F+4E)\,x^3 \\ & +(3F+7G)\,x^2+(2G+8H) \\ & +(H+9I)]+\frac{L}{x-1}\end{aligned}$$

Eseguendo le dovute semplificazioni:

$$\begin{aligned}1 = & \, Lx^9+(-A-9L)\,x^8+(-8A-2B+36L)\,x^7 \\ & +(-7B-3C-84L)\,x^6+(-6C-4D+126L)\,x^5 \\ & +(-5D-5E-126L)\,x^4+(-4E-6F+84L)\,x^3 \\ & +(-3F-7G-36L)\,x^2+(-2G-H+9L)\,x \\ & -(H+9I+L)\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} L=0 \\ A+9L=0 \\ 8A+2B-36L=0 \\ 7B+3C-84L=0 \\ 6C+4D-126L=0 \\ 5D+5E+126L=0 \\ 4E+6F-84L=0 \\ -3F-7G-36L=1 \\ 2G+8H-9L=0 \\ H+9I+L=0 \end{cases} \tag{4}$$

La soluzione del sistema (4) è:

$$A=0, B=0, C=0, F=0, G=-\frac{1}{7}, H=\frac{1}{28}, L=0, D=0, E=0, I=-\frac{1}{252}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}X\,(x) &= -\frac{1}{7}x^2+\frac{1}{28}x-\frac{1}{252} \\ &= -\frac{36x^2-9x+1}{252} \\ Y\,(x) &= 0\end{aligned}$$

Si conclude che:

$$\int\frac{x^2dx}{(x-1)^{10}} = -\frac{36x^2-9x+1}{252}+C$$