**Esercizio 835**
**(File scaricato da http://www.extrabyte.info)**

Calcolare l'integrale

$$F(x)=\int \frac{x^5dx}{(x^3-1)(x^3-8)} \tag{1}$$

***

**Soluzione**
Riduciamo in fattori il denominatore dell'integrando:

$$\left(x^3-1\right)\left(x^3-8\right)=(x-1)(x-2)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+2x+4\right),$$

quindi procediamo per riduzione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}
\frac{x^5}{(x^3-1)(x^3-8)} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+2x+4}\\
&= \frac{1}{(x^3-1)(x^3-8)}[A(x-2)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+2x+4\right)\\
&+ B(x-1)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+2x+4\right)\\
&+ (Cx+D)(x-1)(x-2)\left(x^2+2x+4\right)\\
&+ (Ex+F)(x-1)(x-2)\left(x^2+x+1\right)]\\
&= \frac{1}{(x^3-1)(x^3-8)}[A(x-2)\left(x^4+3x^3+7x^2+6x+4\right)\\
&+ B(x-1)\left(x^4+3x^3+7x^2+6x+4\right)\\
&+ (Cx+D)\left(x^4-x^3-8x+8\right)\\
&+ (Ex+F)\left(x^4-2x^3-x+2\right)]\\
&= \frac{1}{(x^3-1)(x^3-8)}[A\left(x^5+x^4+x^3-8x^2-8x-8\right)\\
&+ B\left(x^5+2x^4+4x^3-x^2-2x-4\right)\\
&+ Cx^5+(D-C)x^4-Dx^3-8Cx^2+(8C-8D)x+8D\\
&+ Ex^5+(F-2E)x^4+(-2F)x^3+(-E)x^2+(2E-F)x+2F]
\end{aligned}$$

Cioè:
$x^5=(A+B+C+E)x^5+(A+2B-C+F+D-2E)x^4+$
$+(A+4B-2F-D)x^3+(-8A-B-8C-E)x^2+$
$+(8C-2B-8A-F-8D+2E)x+(2F-4B-8A+8D)$
Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases}
A+B+C+0+E+0=1\\
A+2B-C+D-2E+F=0\\
A+4B+0-D+0-2F=0\\
8A+B+8C+0+E=0\\
8A+2B-8C+8D-2E+F=0\\
8A+4B+0-8D+0-2F=0
\end{cases},$$

che risulta essere un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$A=-\frac{1}{21}, B=\frac{8}{21}, C=-\frac{2}{21}, D=-\frac{1}{21}, E=\frac{16}{21}, F=\frac{16}{21}$$

Pertanto:

$$\frac{x^5}{(x^3-1)(x^3-8)}=-\frac{1}{21}\frac{1}{x-1}+\frac{8}{21}\frac{1}{x-2}-\frac{1}{21}\frac{x+16}{x^2+x+1}+\frac{16}{21}\frac{x+1}{x^2+2x+4}$$

Integrando:

$$\begin{aligned}\int\frac{x^5dx}{(x^3-1)(x^3-8)}&=-\frac{1}{21}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{8}{21}\int\frac{dx}{x-2}\\&-\frac{1}{21}\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{16}{21}\int\frac{x+1}{x^2+2x+4}dx\\&=-\frac{1}{21}\ln|x-1|+\frac{8}{21}\ln|x-2|\\&-\frac{1}{21}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{16}{21}\int\frac{x+1}{x^2+2x+4}dx\end{aligned}$$

I due integrali a secondo membro si calcolano con il procedimento standard degli integrali contenenti un trinomio semplice di secondo grado:

$$\begin{aligned}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx&=\ln\left(x^2+x+1\right)\\\int\frac{x+1}{x^2+2x+4}dx&=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+4\right)\end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione precedente

$$\begin{aligned}\int\frac{x^5dx}{(x^3-1)(x^3-8)}&=-\frac{1}{21}\ln|x-1|+\frac{8}{21}\ln|x-2|-\frac{1}{21}\ln\left(x^2+x+1\right)\\&+\frac{8}{21}\ln\left(x^2+2x+4\right)+C\\&=\frac{8}{21}\ln\left|x^3-8\right|-\frac{1}{21}\ln\left|x^3-1\right|+C\end{aligned}$$