Esercizio 834
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{\cosh x}{\sinh x (\sinh x + 1)} dx \tag{1}$$

***

Soluzione
Poniamo:

$$t = \sinh x \Longrightarrow \cosh dx = dt,$$

cosicchè l'espressione dell'integrale in funzione della variabile t è:

$$F(t) = \int \frac{dt}{t(t+1)},$$

che si integra per riduzioni in frazioni semplici.

$$\begin{aligned} \frac{1}{t(t+1)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} \\ &= \frac{(A+B)t + A}{t(t+1)}, \end{aligned}$$

cioè:

$$1 = (A+B)t + A$$

Per il principio di indentità dei polinomi:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ A = 1 \end{cases} \Longrightarrow A = -1, \ B = 1$$

L'integrale diventa:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{t(t+1)} &= \int \frac{dt}{t} - \frac{dt}{t+1} \\ &= \ln|t| - \ln|t+1| + C \\ &= \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x:

$$\int \frac{\cosh x}{\sinh x (\sinh x + 1)} dx = \ln\left|\frac{\sinh x}{\sinh x + 1}\right| + C$$