Esercizio 830
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 (x+1)^2} dx \tag{1}$$

***

Soluzione
Procediamo per riduzione in frazioni semplici:

$$\begin{aligned}
\frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 (x+1)^2} &= \frac{A_1}{x-3} + \frac{A_2}{(x-3)^2} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1}{(x-3)^2 (x+1)^2} [A_1 (x-3)(x+1)^2 + A_2 (x+1)^2 \\
&+ B_1 (x-3)^2 (x+1) + B_2 (x-3)^2] \\
&= \frac{1}{(x-3)^2 (x+1)^2} [(A_1 + B_1) x^3 + (-A_1 + A_2 - 5B_1 + B_2) x^2 \\
&+ (-5A_1 + 2A_2 + 3B_1 - 6B_2) x + (-3A_1 + A_2 + 9B_1 + 9B_2)]
\end{aligned}$$

Cioè:

$$\begin{aligned}
5x^2 + 6x + 9 = &(A_1 + B_1) x^3 + (-A_1 + A_2 - 5B_1 + B_2) x^2 + \\
&+ (-5A_1 + 2A_2 + 3B_1 - 6B_2) x + (-3A_1 + A_2 + 9B_1 + 9B_2)
\end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases}
A_1 + 0 + B_1 + 0 = 0 \\
-A_1 + A_2 - 5B_1 + B_2 = 5 \\
-5A_1 + 2A_2 + 3B_1 - 6B_2 = 6 \\
-3A_1 + A_2 + 9B_1 + 9B_2 = 9
\end{cases} \tag{2}$$

Il sistema (2) è di Cramer. Risolvendo otteniamo:

$$A_1 = 0, A_2 = \frac{9}{2}, B_1 = 0, B_2 = \frac{1}{2}$$

Pertanto la riduzione in frazioni semplici è:

$$\frac{5x^2 + 6x + 9}{(x-3)^2 (x+1)^2} = \frac{9}{2(x-3)^2} + \frac{1}{2(x+1)^2}$$

Integrando:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{5x^2+6x+9}{\left(x-3\right)^2\left(x+1\right)^2}dx &= \frac{9}{2}\int \frac{dx}{\left(x-3\right)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x+1\right)^2} \\
&= -\frac{9}{2}\frac{1}{x-3} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + C \\
&= \frac{5x+3}{-x^2+2x+3} + C
\end{aligned}
$$