Esercizio 827
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare l'integrale

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x^2+1)^4} \tag{1}$$

***

Soluzione
Conviene applicare il metodo di Ostrogradskij. Scriviamo la formula di riduzione:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \frac{X(x)}{q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{q_2(x)}dx \tag{2}$$

Nella (2) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x)$, mentre:

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}$$

Le funzioni $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati e di grado inferiori di una unità rispetto a $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente.
Nel nostro caso è:

$$q(x) = \left(x^2+1\right)^4$$
$$q'(x) = 8x\left(x^2+1\right)^3$$

Quindi:

$$q_1(x) = \left(x^2+1\right)^3 \Longrightarrow X(x) = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$
$$q_2(x) = x^2+1 \Longrightarrow Y(x) = Gx + H$$

La (2) si scrive:

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^4} = \frac{Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F}{(x^2+1)^3} + \int \frac{Gx+F}{x^2+1}dx \tag{3}$$

Derivando primo e secondo membro della (3):

$$\frac{1}{(x^2+1)^4} = \frac{1}{(x^2+1)^6}\left[\left(5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E\right)\left(x^2+1\right)^3 - \right.$$
$$\left. - 6x\left(x^2+1\right)^2\left(Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F\right)\right] + \frac{Gx+F}{x^2+1}$$

Sviluppando i prodotti e ordinando i vari termini, otteniamo

$$
\begin{aligned}
1 = Gx^7 + (-A + H)\,x^6 + (-2B + 3G)\,x^5 + \\
+ (5A - 3C + 3H)\,x^4 + (4B - 4D + 3G)\,x^3 \\
+ (3C - 5E + 3H)\,x^2 + (2D - 6F + G)\,x + E + H
\end{aligned}
$$

Il principio di identità dei polinomi genera il seguente sistema di otto equazioni lineari nelle otto incognite (A, B, C, D, E, F, G, H):

$$
\begin{cases}
G = 0 \\
A = H \\
2B = 3G \\
5A - 3C + 3H = 0 \\
4B - 4D + 3G = 0 \\
3C - 5E + 3H = 0 \\
2D - 6F + G = 0 \\
E + H = 1
\end{cases} \tag{4}
$$

Dalla prima, dalla seconda e dalla terza equazione si ricava:

$$
G = 0, B = 0, A = H \tag{5}
$$

Quindi il sistema (4) si riduce a:

$$
\begin{cases}
8A - 3C = 0 \\
D = 0 \\
3C - 5E + 3A = 0 \\
F = 0 \\
E + A = 1
\end{cases} \tag{6}
$$

perciò $D = F = 0$:

$$
\begin{cases}
8A - 3C + 0 = 0 \\
3A + 3C - 5E = 0 \\
A + 0 + E = 1
\end{cases},
$$

che si risolve facilmente con la regola di Cramer: $A = \frac{5}{16}, C = \frac{5}{6}, E = \frac{11}{16}$. Riassumendo, la soluzione del sistema lineare (4) è:

$$
A = \frac{5}{16}, B = 0, C = \frac{5}{6}, D = 0, E = \frac{11}{16}, F = 0, G = 0, H = \frac{5}{16} \tag{7}
$$

Sostituendo la soluzione trovata in (3):

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x^2+1)^4} &= \frac{\frac{5}{16}x^5 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{11}{16}x}{(x^2+1)^3} + \frac{5}{16}\underbrace{\int \frac{dx}{x^2+1}}_{=\arctan x} \\
&= \frac{x\,(15x^3 + 40x + 33) + 15\,(x^2+1)^3 \arctan x}{48\,(x^2+1)^3} + C
\end{aligned}
$$