Esercizio 825
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale utilizzando separatamente il metodo di Ostrogradskij e il metodo della riduzione in frazioni semplici (coefficienti indeterminati).

$$F(x) = \int \frac{dx}{x(x+1)^2} \tag{1}$$

***

Soluzione

Metodo di Ostrogradskij

Ricordiamo la formula di riduzione di Ostrogradskij:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \frac{X(x)}{q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{q_2(x)} dx \tag{2}$$

Nella (2) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x)$, mentre:

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}$$

Le funzioni $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati e di grado inferiori di una unità rispetto a $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente.
Nel nostro caso è:

$$q(x) = x(x+1)^2$$
$$q'(x) = (x+1)^2 + 2x(x+1)$$

Quindi:

$$q_1(x) = x+1 \Longrightarrow X(x) = A$$
$$q_2(x) = x(x+1) \Longrightarrow Y(x) = Bx + C$$

La (2) si scrive:

$$\int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \int \frac{Bx+C}{x(x+1)} dx \tag{3}$$

Derivando primo e secondo membro della (3):

$$\begin{aligned}\frac{1}{x\left(x+1\right)^{2}} &= -\frac{A}{\left(x+1\right)^{2}}+\frac{Bx+C}{x\left(x+1\right)} \\ &= \frac{-Ax+\left(Bx+C\right)\left(x+1\right)}{x\left(x+1\right)^{2}} \\ &= \frac{Bx^{2}+\left(-A+B+C\right)x+C}{}\end{aligned} \tag{4}$$

cioè:

$$1 = Bx^{2}+\left(-A+B+C\right)x+C$$

Il principio di identità dei polinomi genera il seguente sistema di tre equazioni lineari nelle tre incognite A, B, C:

$$\begin{cases} B = 0 \\ C = 1 \\ A - B - C = 0 \end{cases},$$

la cui soluzione è immediata:

$$A = 1, B = 0, C = 1 \tag{5}$$

Sostituendo nella (3) la soluzione (5), si ha:

$$\int \frac{dx}{x\left(x+1\right)^{2}} = \frac{1}{x+1}+\int \frac{dx}{x\left(x+1\right)} \tag{6}$$

Ci resta da calcolare l'integrale a secondo membro $\int \frac{dx}{x(x+1)}$; possiamo procedere per riduzione in frazioni parziali:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x\left(x+1\right)} &= \frac{a}{x}+\frac{b}{x+1} \\ &= \frac{\left(a+b\right)x+a}{x\left(x+1\right)},\end{aligned}$$

da cui:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \Longrightarrow a = 1, b = -1,$$

cosicchè (omettiamo la costante di integrazione, per poi inserirla nel risultato finale):

$$\int \frac{dx}{x\left(x+1\right)} = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|,$$

che sostituito nella (6) fornisce il risultato:

$$\int \frac{dx}{x\left(x+1\right)^{2}} = \frac{1}{x+1}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C \tag{7}$$

Riduzione in frazioni parziali

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2} \\ &= \frac{A(x+1)^2 + B_1 x(x+1) + B_2 x}{x(x+1)^2} \\ &= \frac{(A+B_1)x^2 + (2A+B_1+B_2)x + A}{x(x+1)^2},\end{aligned}$$

cioè:

$$(A+B_1)x^2 + (2A+B_1+B_2)x + A = 1$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} A+B_1 = 0 \\ 2A+B_1+B_2 = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

Tale sistema si risolve facilmente per sostituzione, ottenendo:

$$A = 1, B_1 = -1, B_2 = -1$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x+1)^2} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} \\ &= \ln|x| - \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C \\ &= \frac{1}{x+1} + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C\end{aligned}$$

Confrontando i due metodi, vediamo che in questo caso specifico il metodo di Ostrogradskij è più laborioso, per cui è preferibile applicare quest'ultimo solo nei casi di un $q(x)$ "più complicato". Ad esempio, per $q(x) = (x^3-1)^4$, la riduzione in frazioni semplici conduce ad un sistema di 12 equazioni lineari in 12 incognite.