

Esercizio 824
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare il seguente integrale utilizzando il metodo di Ostrogradskij

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2} \quad (1)$$

Soluzione

Ricordiamo la formula di riduzione di Ostrogradskij:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)} dx = \frac{X(x)}{q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{q_2(x)} dx \quad (2)$$

Nella (2) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x)$, mentre:

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}$$

Le funzioni $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati e di grado inferiori di una unità rispetto a $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente.

Nel nostro caso è:

$$q(x) = (x^2 - 1)^2$$
$$q'(x) = 2x(x^2 - 1)$$

Quindi:

$$q_1(x) = x^2 - 1 \implies X(x) = Ax + B$$
$$q_2(x) = x^2 - 1 \implies Y(x) = Cx + D$$

La (2) si scrive:

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 - 1} + \int \frac{Cx + D}{x^2 - 1} dx \quad (3)$$

Derivando primo e secondo membro della (3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^2 - 1)^2} &= \frac{A(x^2 - 1) - 2x(Ax + B)}{(x^2 - 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 1} \\ &= \frac{Ax^2 - A - 2Ax^2 - 2Bx + (Cx + D)(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} \\ &= \frac{Cx^3 + (-A + D)x^2 + (-2B - C)x + (-A - D)}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned} \quad (4)$$

cioè:

$$1 = Cx^3 + (-A + D)x^2 + (-2B - C)x + (-A - D)$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} C = 0 \\ A = D \\ 2B = -C \\ A + D = -1 \end{cases}$$

Sostituendo nella (3) i valori dei coefficienti così trovati:

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x}{2(x^2 - 1)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - 1} \quad (5)$$

L'integrale a secondo membro è un integrale fondamentale, quindi

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + 1}{x - 1} \right|$$

che sostituita nella (5) fornisce il risultato:

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{x}{2(x^2 - 1)} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x + 1}{x - 1} \right| + C \quad (6)$$