Esercizio 823
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Calcolare il seguente integrale utilizzando il metodo di Ostrogradskij

$$F(x) = \int \frac{dx}{(x^4-1)^2} \tag{1}$$

***

Soluzione

Ricordiamo la formula di riduzione di Ostrogradskij:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx = \frac{X(x)}{q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{q_2(x)}dx \tag{2}$$

Nella (2) $q_1(x)$ è il massimo comune denominatore di $q(x)$ e $q'(x)$, mentre:

$$q_2(x) = \frac{q(x)}{q_1(x)}$$

Le funzioni $X(x)$, $Y(x)$ sono polinomi a coefficienti indeterminati e di grado inferiori di una unità rispetto a $q_1(x)$ e $q_2(x)$ rispettivamente.
Nel nostro caso è:

$$\begin{aligned} q(x) &= \left(x^4-1\right)^2 \\ q'(x) &= 8x^3\left(x^4-1\right) \end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} q_1(x) &= x^4-1 \Longrightarrow X(x) = Ax^3+Bx^2+Cx+D \\ q_2(x) &= x^4-1 \Longrightarrow Y(x) = Ex^3+Fx^2+Gx+H \end{aligned}$$

La (2) si scrive:

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4-1} + \int \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4-1} \tag{3}$$

Derivando primo e secondo membro della (3):

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^4-1)^2} &= \frac{(3Ax^2+2Bx+C)(x^4-1)-4x^3(Ax^3+Bx^2+Cx+D)}{(x^4-1)^2}+ \\ &+ \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4-1} \\ &= \frac{p_1(x)}{(x^4-1)^2} + \frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4-1} \\ &= \frac{p_1(x)+Ex^7+Fx^6+Gx^5+Hx^4-Ex^3-Fx^2-Gx-H}{(x^4-1)^2}, \end{aligned} \tag{4}$$

essendo:

$$\begin{aligned} & p_1(x) \stackrel{def}{=} \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)\left(x^4 - 1\right) - 4x^3\left(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D\right) \\ & = 3Ax^6 + 2Bx^5 + Cx^4 - 3Ax^2 - 2Bx - C - 4Ax^6 - 4Bx^5 - 4Cx^4 - 4Dx^3 \\ & = -Ax^6 - 2Bx^5 - 3Cx^4 - 4Dx^3 - 3Ax^2 - 2Bx - C, \end{aligned}$$

che sostituita in (4) fornisce:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x^4-1)^2} &= Ex^7 + (-A + F)\,x^6 + (-2B + G)\,x^5 + \\ & + (-3C + H)\,x^4\,(-4D - E)\,x^3\,(-3A - F+)\,x^2 + (-2B - G)\,x + (-C - H)\,, \end{aligned}$$

cioè:

$$\begin{aligned} 1 &= Ex^7 + (-A + F)\,x^6 + (-2B + G)\,x^5 + \\ & + (-3C + H)\,x^4\,(-4D - E)\,x^3\,(-3A - F+)\,x^2 + (-2B - G)\,x + (-C - H) \end{aligned}$$

Per il principio di identità dei polinomi:

$$\begin{cases} E = 0 \\ A = F \\ G = 2B \\ H = 3C \\ E = -4D \\ 3A = -F \\ 2B = -G \\ C + H = -1 \end{cases}$$

da cui otteniamo:

$$A = F = E = D = B = G = 0$$

$$\begin{cases} H = 3C \\ C + H = -1 \end{cases} \Longrightarrow C = -\frac{1}{4}, H = -\frac{3}{4}$$

Sostituendo nella (3) i valori dei coefficienti così trovati:

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = -\frac{x}{4\,(x^4-1)} + \int \frac{dx}{x^4-1} \tag{5}$$

Dobbiamo perciò calcolare

$$\int \frac{dx}{x^4-1}$$

Risulta:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^4-1} &= \frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2+1} \\
&= \frac{a(x+1)(x^2+1) + b(x-1)(x^2+1) + (cx+d)(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} \\
&= \frac{(a+b+c)x^3 + (a-b+d)x^2 + (a+b-c)x + (a-b-d)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)}
\end{aligned}
$$

Cioè:

$$1 = (a+b+c)x^3 + (a-b+d)x^2 + (a+b-c)x + (a-b-d)$$

Per il principio di identità dei polinomi, i coefficienti a, b, c, d devono soddisfare il sistema lineare:

$$
\begin{cases}
a+b+c+0=0 \\
a-b+0+d=0 \\
a+b-c+0=0 \\
a-b+0-d=1
\end{cases},
$$

che risulta essere un sistema di Cramer, la cui soluzione è:

$$a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{4}, c = 0, d = -\frac{1}{2}$$

Quindi (omettiamo la costante di integrazione)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^4-1} &= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan x \\
&= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\arctan x,
\end{aligned}
$$

che sostituita nella (5) fornisce il risultato:

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = \frac{3}{8}\arctan x - \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{x}{4(x^4-1)} + C$$