Esercizio 810
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Sia L il coefficiente di autoinduzione di un solenoide. Se R è la sua resistenza ohmica, la corrente che circola nel solenoide quando viene sottoposto ad una forza elettromotrice E_0 =costante, è:

$$i = I_0 \left(1 - e^{-Rt/L}\right), \tag{1}$$

essendo $I_0 = \frac{E_0}{R}$.
Ricavare una formula approssimata di i, nel caso in cui R sia trascurabilmente piccola.

***

Soluzione
Eseguiamo il limite per $R \to 0$ della corrente che circola nel solenoide:

$$\lim_{R\to 0} i\,(R) = E_0 \lim_{R\to 0} \frac{1 - e^{-Rt/L}}{R} = \frac{0}{0} \overset{H}{=} E_0 \lim_{R\to 0} \frac{t}{L} e^{-Rt/L} = \frac{E_0 t}{L}$$

Quindi:

$$i \underset{R\to 0}{\longrightarrow} \frac{E_0 t}{L} \tag{2}$$

Osserviamo che la (1) è una "salita esponenziale". Per graficare il suo andamento ci conviene adimensionalizzarla. Poniamo:

$$\tau = \frac{L}{R}, \tag{3}$$

che ha le dimensioni di un tempo ed è la *costante di tempo* del circuito. Ora passiamo dalla variabile t alla variabile adimensionale $x = \frac{t}{\tau}$:

$$\frac{i}{I_0} = 1 - e^{-x} \tag{4}$$

Vediamo che:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{i}{I_0} = 1,$$

cioè la funzione (4) ha un asintoto orizzontale. Il grafico è riportato in figura (1).

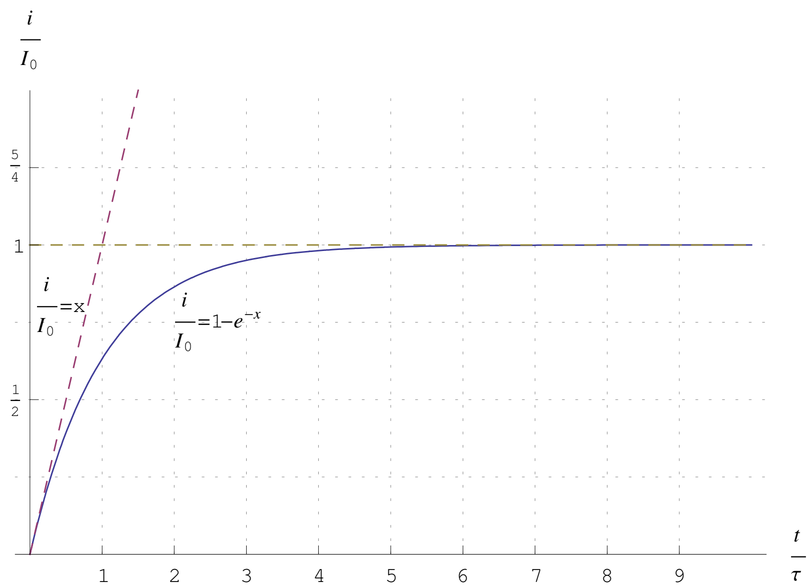

Figure 1: Andamento di $\frac{i}{I_0}$ in funzione della variabile adimensionale $x = \frac{t}{\tau}$. La retta in tratteggio esprime l'andamento della corrente nel limite di R che tende a zero.