

Esercizio 809
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Calcolare l'integrale:

$$F(x) = \int \frac{\sin x dx}{\cos x (1 + \cos^2 x)}$$

Soluzione

Poniamo:

$$t = \cos x$$

Differenziando:

$$dt = -\sin x dx$$

L'integrale diventa:

$$F(t) = - \int \frac{dt}{t(t^2 + 1)}$$

L'integrando è una funzione razionale propria,

$$\frac{1}{t(t^2 + 1)}$$

per cui integriamo per decomposizione in frazioni parziali.

$$\begin{aligned} \frac{1}{t(t^2 + 1)} &= \frac{A}{t} + \frac{Bt + C}{t^2 + 1} \\ &= \frac{A(t^2 + 1) + Bt^2 + Ct}{t(t^2 + 1)} \\ &= \frac{(A + B)t^2 + Ct + A}{t(t^2 + 1)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$(A + B)t^2 + Ct + A = 1$$

Da ciò si ottiene il sistema lineare:

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ A = 1 \end{cases},$$

la cui soluzione è immediata:

$$A = 1, B = -1, C = 0$$

Perciò:

$$\begin{aligned} F(t) &= -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{t dt}{t^2 + 1} \\ &= -\ln |t| + \frac{1}{2} \ln (t^2 + 1) + C \\ &= \ln \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{|t|} + C \end{aligned}$$

Ripristinando la variabile x :

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x (1 + \cos^2 x)} = \ln \frac{\sqrt{1 + \cos^2 x}}{|\cos x|} + C$$